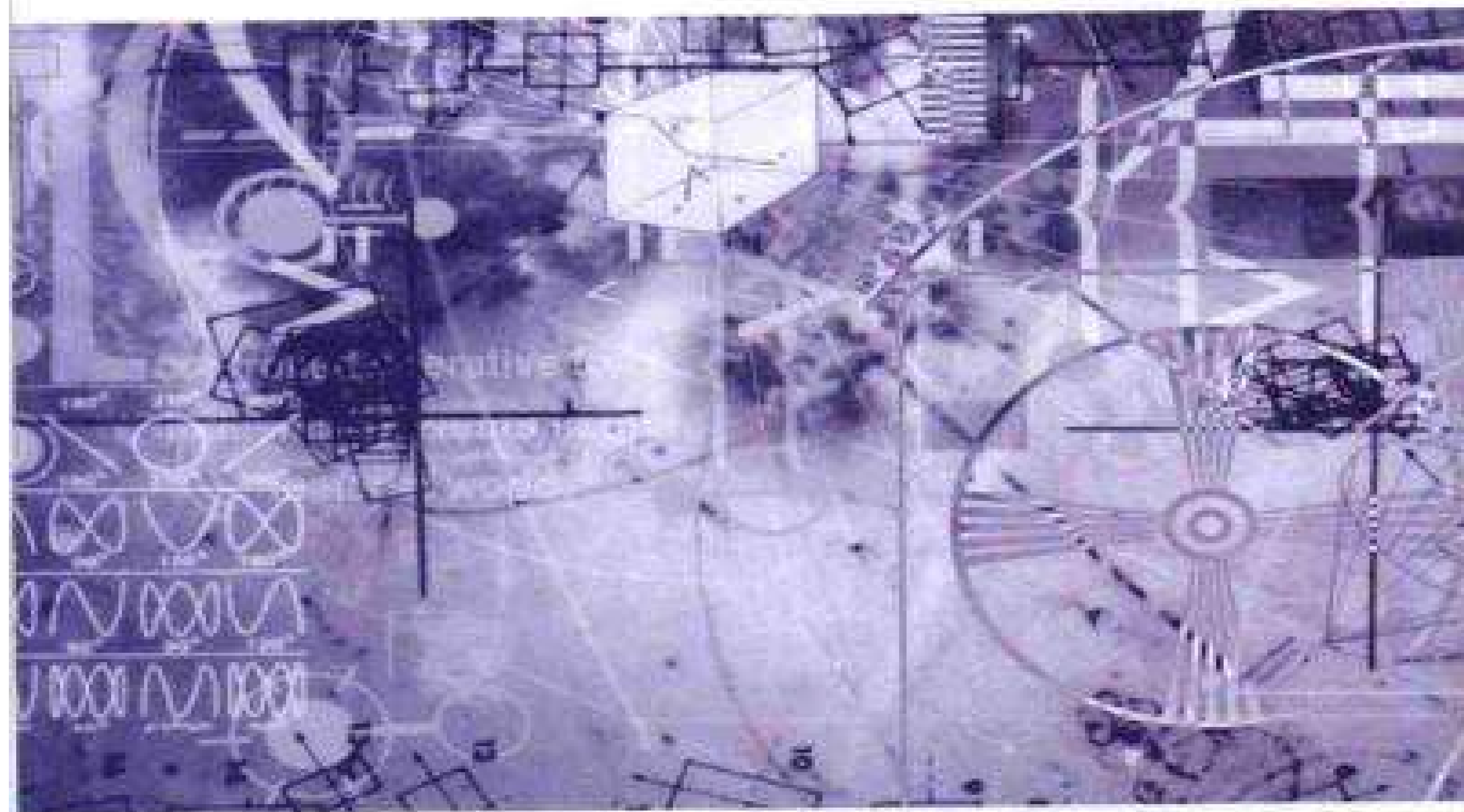
SHIBIANHANSHULUN DE DIANXING WENTI YU FANGFA

实变函数论的典型问题与方法

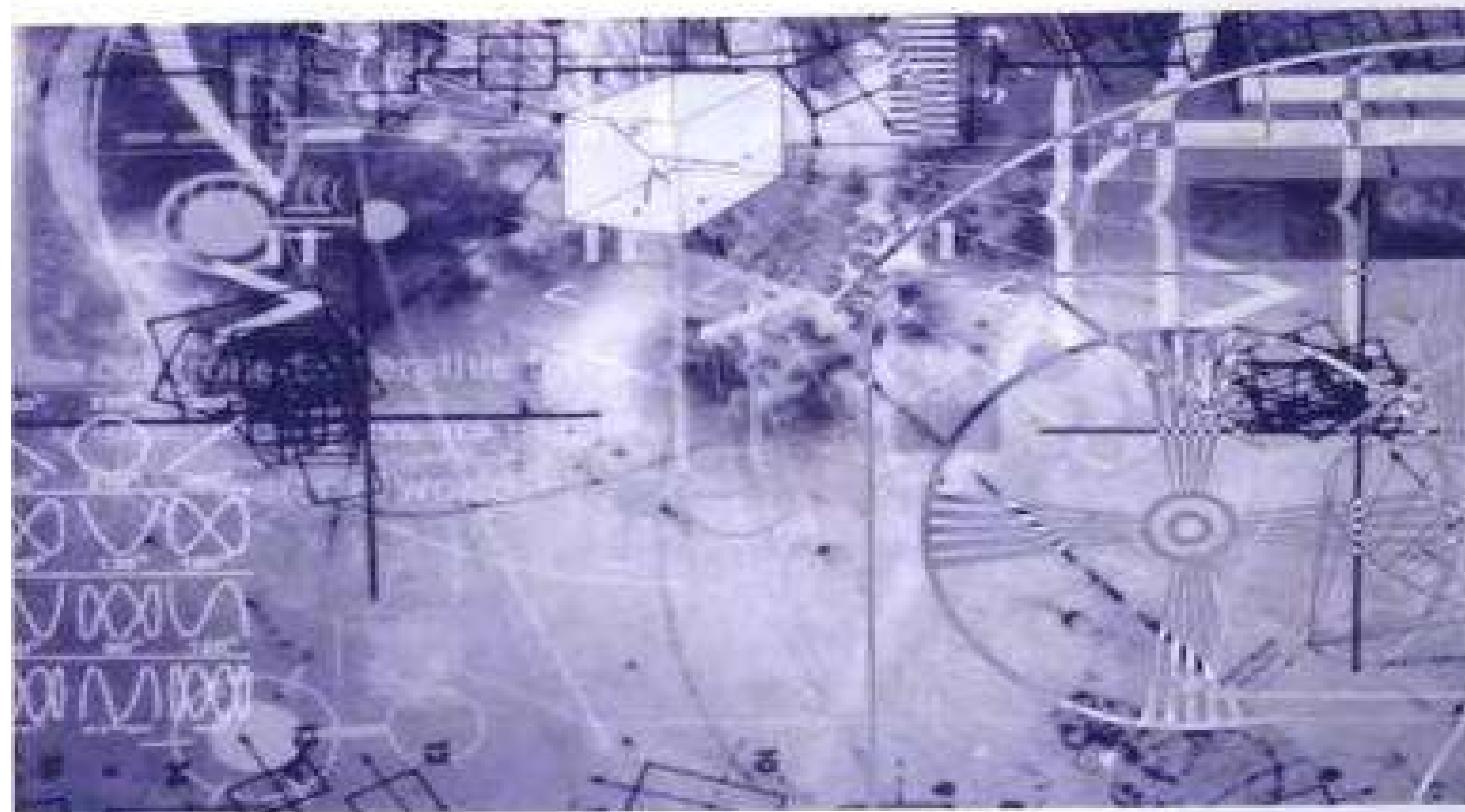
张喜堂 主编



1

华中师范大学出版社

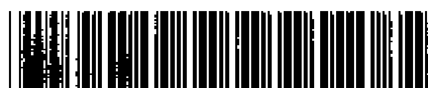
SHIBIANHANSHULUN DE DIANXING WENTI YU FANGF



实变函数论的典型问题与方法

张喜堂　主编

张喜堂　余东华　方育坤　编写



华中师范大学出版社

2000年·武汉

（鄂）新登字 11 号

图书在版编目（CIP）数据

实变函数论的典型问题与方法/张喜堂主编．
武汉：华中师范大学出版社，2002.4

ISBN 7-5622-2209-6/O・125

Ⅰ．实…　Ⅱ．张…　Ⅲ．实变函数论　Ⅳ．O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 08672 号

实变函数论的典型问题与方法

华中师范大学出版社出版发行
（武昌桂子山　邮编：430079　电话：027－87876210）

新华书店湖北发行所经销　　　　华中师范大学印刷厂印刷

责任编辑：张小新　　　　封面设计：罗明波
责任校对：张　钟　　　　督　　印：方汉江

开本：850mm×1168mm　1/32　　印张：13.375　字数 351 千字
版次：2000 年 5 月第 1 版　　2002 年 4 月第 3 次印刷
印数：4001－7000　　定价：20.00 元

本书如有印装质量问题，可向承印厂调换。

前　言

《实变函数论》是大学数学课中理论性较强的一门基础课．在教学实践中我们注意到，学生学习和掌握教材的基本内容困难并不大，但要运用所学的知识去分析问题和解决问题就感到困难，对于难度稍大一些的题目甚至不知如何下手．为配合学生对该课程的学习，培养学生分析问题和解决问题的能力，我们编写了本书．

本书遵循现行《实变函数论》教材的顺序，对实变函数论的题目进行了比较筛选；对全国部分高校硕士研究生入学试题中的一些实变函数试题进行整理，确定出许多有较强典型性、启发性和综合性的题目．此外，在重点解答每个题目的同时，比较注重分析解题的思想和解题方法，使读者读来自然，学后能用．

全书以解题为中心，每章在“**内容提要**”中，对本章的要点、定义、定理、性质进行概括性阐述，然后在“**问题解答**”中，由浅到深地安排了一批又一批不同层次的例题，对具体的方法和技巧进行一步一步地分析讲解，并尽可能地与《实变函数论》教材中的重要概念和定理联系起来．这样有助于读者较好地把握住教材的难点和重点，使不同层次的读者从中找到自己所需要的东西．

本书由华中师范大学数学系副教授张喜堂主编，参加编写的有张喜堂（编写第一章，第二章），余东华（编写第三章，第四

章)，方育坤（编写第五章，第六章)，全书由张喜堂统稿，张喜堂还参加了第三章和第五章的部分编写工作.

由于编者水平有限，书中难免会有缺点和错误，有些题目的解法也不一定是最好，恳请读者和从事这一课程教学的教师不吝赐教.

编者于华中师范大学数学系

2000 年 4 月

目　录

第一章　集合的一般理论

内容提要

一、集合的概念及其运算

集合用大写字母 $A,B,X,E,\cdots$ 表示，而集的元素常用小写字母 $a,b,x,e,\cdots$ 表示.

当 x 是集 A 的元素时，记为 $x\in A$，否则，记为 $x\overline{\in} A$ 或 $x\notin A$.

注　1° 任一对象或事物 x 被当作某一给定集合 A 的元素时，则 x 与 A 的关系要么是 $x\in A$，要么是 $x\overline{\in} A$，二者必居其一，而不可兼得，即“非此即彼”.

2° 不含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$；仅含一个元素的集合称为单元素集；如果集合只含有限个元素，则称此集合为有限集，否则称为无限集.

[定义 1.1]　设 A,B 是两个集合

(1) 若 A 的所有元素都是 B 的元素，即 $\forall\ x\in A\Longrightarrow x\in B$，则称 A 为 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

(2) 若 $A\subseteq B$，但存在 $x_0\in B$ 而 $x_0\overline{\in} A$，则称 A 为 B 的真子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

(3) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集 A 与 B 相等，记为 $A=B$（A 与 B 的元素完全相同）.

注　1° 对任意集 A 有 $A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$.

2° 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

[定义 1.2]　设 A,B 是两个集合，则定义 A 与 B 的并（和）、交（积）、差、直积如下：

(1) $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$；

(2) $A\cap B=\{x\mid x\in B$ 且 $x\in A\}$;

(3) $A-B=\{x\mid x\in A$ 但 $x\overline{\in}B\}$;

(4) 当 $B\subseteq A$ 时,称 $A-B$ 为集 B 关于 A 的补集,记为 $\mathscr{C}_A B=\{x\mid x\in A$ 但 $x\overline{\in}B,B\subseteq A\}$;

(5) $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$.

注 A 与 B 的并 $A\cup B$ 也可用 $A+B$ 表示,交 $A\cap B$ 也可用 $A\cdot B$ 表示,$\mathscr{C}_A B$ 也可用 B^C 表示,特别,直积 $A\times B$ 不能写为 $A\cdot B$.

[定理 1.1] 集合具有如下常用性质:

(1) $A\cup A=A,A\cap A=A$;

(2) $A\cup\varnothing=A,A\cap\varnothing=\varnothing$;

$A\cup S=S,A\cap S=A$;(其中 S 为全集)

(3) $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(4) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(5) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(6) $A\cup(A\cap B)=A,A\cap(A\cup B)=A$;

(7) $A\cup\mathscr{C}A=S,A\cap\mathscr{C}A=\varnothing$;

(8) $\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$;

(9) 若 $A\subseteq B$,则有

$A\cup B=B,A\cap B=A,A-B=\varnothing$,

$A\cup C\subseteq B\cup C,A\cap C\subseteq B\cap C$;

(10) $A\cup B=[(A-B)\cup(B-A)]\cup(A\cap B)$.

[定义 1.3] (1) 设 X 为任一集,若 $\forall\ \alpha\in X$,都有一个集 A_α 与之对应,则称集 A_α 的全体为以 X 为指标集的集族,记为 $\{A_\alpha\mid\alpha\in X\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in X}$;

特别,当 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 时,$\{A_\alpha\}=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$;当 X 为自然数集 $\mathbf{N}$ 时,$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{N}}=\{A_n\}_{n=1}^{\infty}=\{A_1,A_2,\cdots\}$ 称为集列,简记为 $\{A_n\}$.

(2) 集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in X}$ 的并集定义为

$$\bigcup_{\alpha\in X}A_\alpha\Big(\text{或}\sum_{\alpha\in X}A_\alpha\Big)=\{x\mid\exists\ \alpha_0\in X,\text{使 }x\in A_{\alpha_0}\}.$$

(3) 集族$\{A_\alpha\}_{\alpha\in X}$的交集定义为

$$\bigcap_{\alpha\in X}A_\alpha(\text{或}\prod_{\alpha\in X}A_\alpha)=\{x\mid\forall\ \alpha\in X,x\in A_\alpha\};$$

特别,当 $X=\mathrm{N}$ 时,称 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 为可列并,称 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 为可列交.

[定理 1.2] 笛摩根(De Morgan)定理:设 S 是任一集合,而$\{A_\alpha\mid\alpha\in X\}$是 S 的一组子集,则有

$$\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in X}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in X}(\mathscr{C}A_\alpha)$$

$$\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha\in X}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in X}(\mathscr{C}A_\alpha).$$

注 1° 若 $A_\alpha\subset B,\forall\ \alpha\in X$,则 $\bigcap\limits_{\alpha\in X}A_\alpha\subset B$;

若 $A_\alpha\supset B,\forall\ \alpha\in X$,则 $\bigcup\limits_{\alpha\in X}A_\alpha\supset B$.

2° $(\bigcup\limits_{\alpha\in X}A_\alpha)\cap B=\bigcup\limits_{\alpha\in X}(A_\alpha\cap B)$;

$(\bigcap\limits_{\alpha\in X}A_\alpha)\cup B=\bigcap\limits_{\alpha\in X}(A_\alpha\cup B)$.

3° $\bigcup\limits_{\substack{\alpha\in X\\ \beta\in Y}}(A_\alpha\cap B_\beta)=(\bigcup\limits_{\alpha\in X}A_\alpha)\cap(\bigcup\limits_{\beta\in Y}B_\beta)$;

$\bigcup\limits_{\substack{\alpha\in X\\ \beta\in Y}}(A_\alpha\cup B_\beta)=(\bigcup\limits_{\alpha\in X}A_\alpha)\cup(\bigcup\limits_{\beta\in Y}B_\beta)$.

[定义 1.4] 设$\{A_n\}$是一集列,则定义集列$\{A_n\}$的上限集$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 和下限集$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 如下:

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\exists\ \{A_{n_k}\}\subseteq\{A_n\},\text{使 }x\in A_{n_k},k=1,2,\cdots\}$,

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid\exists\ n_0\in\mathrm{N},\forall\ n>n_0,x\in A_n\}$.

若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,则称$\{A_n\}$收敛.这时称$\{A_n\}$存在极限集,记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

[定理 1.3] (1) 对任一集列$\{A_n\}$,有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

(2) 若集列$\{A_n\}$是单调增加的,即对$\forall\ n,A_n\subseteq A_{n+1}$,则$\{A_n\}$是收敛的,且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

若集列$\{A_n\}$是单调减少的，即$A_n\supseteq A_{n+1}$，$\forall n$，则$\{A_n\}$是收敛的，且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

［定义 1.5］ 设X是一个固定的非空集，又$A\subseteq X$，作X上的函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\overline{\in}A(\text{即 } x\in X-A)\end{cases}$$

则称$\chi_A(x)$为集A的特征函数.

［定理 1.4］ 特征函数的性质：

(1) 若$\forall x\in X$，$\chi_A(x)=\chi_B(x)$，则$A=B$；

(2) $A=X\Longleftrightarrow\chi_A(x)\equiv 1\ (x\in X)$；

$A=\varnothing\Longleftrightarrow\chi_A(x)\equiv 0\ (x\in X)$；

(3) $A\subseteq B\Longleftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$；

$A\supseteq B\Longleftrightarrow\chi_A(x)\geqslant\chi_B(x)$；

(4) $\chi_{\bigcup\limits_{n\in N}A_n}(x)=\max\limits_{n\in N}\chi_{A_n}(x)$；

$\chi_{\bigcap\limits_{n\in N}A_n}(x)=\min\limits_{n\in N}\chi_{A_n}(x)$.

二、集的势与无限集理论

［定义 1.6］ 设A,B为两个非空集合：

(1) 若对每一个$x\in A$，均存在唯一的$y\in B$与之对应，则称此对应为映射，记为$\varphi:A\to B$，并称φ是由A到B的一个映射.

(2) 若$\varphi:A\to B$，当$x_1,x_2\in A$，且$x_1\neq x_2$时，有$\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$，则称$\varphi$是由$A$到$B$的一个单射；若$\varphi$的值域$\{y\mid y=\varphi(x),x\in A\}=B$，则称$\varphi$是由$A$到$B$的一个满射；若$\varphi$既是单射又是满射，则称$\varphi$是$A$到$B$上的一一映射.

(3) 若存在一个由A到B上的一一映射，则称集合A与B对等，记为$A\sim B$.

注 1° 对等关系满足三个基本性质：反身性，对称性，传递性.

2° 若$\{A_\alpha\}$与$\{B_\alpha\}$中任两个集都不相交，则$\bigcup\limits_{\alpha\in X}A_\alpha\sim\bigcup\limits_{\alpha\in X}B_\alpha$.

3° 欲证两集合A,B对等，只须在A,B之间构造出一一对应即可.

4° $A\sim B$ 与 $A=B$ 的本质区别在于：

$$A=B \Longrightarrow A\sim B，其逆不真.$$

［定义 1.7］ (1) 能与自然数集对等的集称为可列集，不是可列集的无限集称为不可列集，有限集或可列集称为至多可列集.

(2) 如果两集合对等，则称它们具有相同的势或基数，集 A 的势用 $\overline{\overline{A}}$ 表示.

若 $A\sim \mathrm{N}$，则用 a 表示 A 的势，即 $\overline{\overline{A}}=a$.

若 $A\sim[0,1]$，则用 c 表示 $\overline{\overline{A}}$，即 $\overline{\overline{A}}=c$.

注 1° 若 $A\sim B$，则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

2° $\overline{\overline{\varnothing}}=0$，有限集的势为元素的个数.

3° 若存在 $C\subset B$，使 $A\sim C$，且 A 与 B 不对等，则 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.

4° $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 有且只有一个成立.

［定理 1.5］ 伯恩斯坦(Bernstein)定理：设 A,B 为两个集，若有 A 的子集 A_1 与 B 的子集 B_1，使 $A\sim B_1$ 且 $A_1\sim B$，则 $A\sim B$.

［定理 1.6］ 无限集的特征性质：

(1) A 为无限集 $\Longleftrightarrow A_1$ 为 A 的某一真子集，且 $A\sim A_1$；

(2) A 为无限集 $\Longrightarrow \exists\ B\subseteq A$，使 $B\sim N$.

［定理 1.7］ 可列集的若干结论：

(1) A 为可列集 $\Longleftrightarrow A$ 的元素可排列成一个无穷序列的形式，即 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$；

(2) 可列集的任何子集都是至多可列集；可列集的无穷子集是可列集；

(3) 至多可列个至多可列集的并集是至多可列集，且参与并运算的集中至少有一个是可列集时，其并是可列集；

(4) 有限多个至多可列集 $A,B,C,\cdots,X$ 的直积 $A\times B\times C\times\cdots\times X=\{(a,b,c,\cdots,x)\mid a\in A,b\in B,c\in C,\cdots,x\in X\}$ 是至多可列集；

(5) 若 A 为至多可列集，B 为无限集，则 $A\cup B\sim B$；

(6) 有理数集 Q 是可列集；整系数多项式的全体所成之集是可列集；R^1 上某些长度不为零且互不相交的区间所成之集是至多可列集；R^1 上单调函数的不连续点所成之集是至多可列集；代数数全体所成之集是可列集.

［**定理 1.8**］ 不可数集的若干结论：

(1) 区间$[0,1]$是一个不可数集，其势记为 c，称 c 为连续基数；

(2) 至多可列个或不可列个不可列集的并集是不可列集；

(3) 有限个具有连续基数 c 的集合的直积集是具有连续基数 c 的集；

(4) 设$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\overline{\overline{A}}_n\leqslant c$，$\forall\ n$，且至少有一个 $\overline{\overline{A}}_{n_0}=c$，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 具有连续基数 c；

(5) 全体实数 R^1 是不可数集，且 $R^1\sim[0,1]$，即$\overline{\overline{R^1}}=c$；$R^1$ 上任一个长度大于零的区间都与$[0,1]$对等，全体自然数数列所成之集具有连续基数 c；n 维空间中的所有点所成之集 R^n 具有连续基数 c；全体实数列所成之集具有连续基数 c.

［**定理 1.9**］ 无最大势定理：设 M 是任意集，$\mathscr{B}(M)$表示由 M 的所有子集所成之集，则有$\overline{\overline{\mathscr{B}(M)}}>\overline{\overline{M}}$.

问 题 解 答

一、回答问题并说明理由

［1.1］ 为什么说空集$\varnothing$是任何集的子集？

答 由于 $B\subset A$ 的意义是：若 $a\in B$，则 $a\in A$，此命题的逆否命题为：若 $a\overline{\in} A$，则必有 $a\overline{\in} B$. 因此，要证明$\varnothing\subset A$，只须证明若 $a\overline{\in} A$，则 $a\overline{\in}\varnothing$即可. 事实上，若 $a\overline{\in} A$，由于$\varnothing$中不含任何元素，当然有 $a\overline{\in}\varnothing$，于是，$\varnothing\subset A$，即$\varnothing$是任何集的子集.

[1.2] 若 $A\subset B, B\subset C$，则 $A\subset C$ 是什么原故？

解 (1) 若 $A=\varnothing$，则结论 $A\subset C$ 显然成立.

(2) 若 $A\neq\varnothing, \forall a\in A$，由题设 $A\subset B$，则有 $a\in B$，又 $B\subset C$，所以 $a\in C$，故 $A\subset C$.

[1.3] 为什么有 $A-B=A\cap\mathscr{C}B$？

答 因 $\forall x\in A-B$，则 $x\in A$ 且 $x\overline{\in}B$，从而 $x\in A$ 且 $x\in\mathscr{C}B$，即 $x\in A\cap\mathscr{C}B$，所以，$A-B\subset A\cap\mathscr{C}B$.

反之，$\forall x\in A\cap\mathscr{C}B$，则 $x\in A$ 且 $x\in\mathscr{C}B$，从而 $x\in A$ 且 $x\overline{\in}B$，即 $x\in A-B$，所以，$A\cap\mathscr{C}B\subset A-B$.

综上可知，$A-B=A\cap\mathscr{C}B$.

注 我们在以后问题的证明中，经常用到这一等式将差化为交. 因为差运算性质不多，而交的运算性质多而方便，所以运用这一等式可使问题简化.

[1.4] $(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$ 成立的充要条件是什么？

答 左边$=(A-B)\cup B=(A\cap\mathscr{C}B)\cup B$

$=(A\cup B)\cap(\mathscr{C}B\cup B)=(A\cup B)\cap S=A\cup B.$

右边$=(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap\mathscr{C}B$

$=(A\cap\mathscr{C}B)\cup(B\cap\mathscr{C}B)=(A-B)\cup\varnothing=A-B.$

要使左边=右边，即 $A\cup B=A-B$，从而当且仅当 $B=\varnothing$ 时才能成立. 即 $(A-B)\cup B=(A\cup B)-B$ 成立的充要条件是 $B=\varnothing$.

[1.5] $(B-A)\cup A=B$ 成立的充要条件是什么？

答 左边$=(B-A)\cup A=(B\cap\mathscr{C}A)\cup A$

$=(B\cup A)\cap(\mathscr{C}A\cup A)=(B\cup A)\cap S$

$=B\cup A.$

右边$=B$，要使 $B\cup A=B$，当且仅当 $A\subset B$ 时才能成立，即 $(B-A)\cup A=B$ 成立的充要条件是 $A\subset B$.

[1.6] 为什么说 $\{x\mid x>0\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid x>\dfrac{1}{n}\right\}$？

答 设 $x_0\in\{x\mid x>0\}$，则 $x_0>0$，从而存在 $n_0\in\mathrm{N}$，使 $x_0>\dfrac{1}{n_0}$，

即 $x_0\in\left\{x\mid x>\frac{1}{n_0}\right\}$，也即 $x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid x>\frac{1}{n}\right\}$. 所以 $\{x\mid x>0\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid x>\frac{1}{n}\right\}$.

反之，设 $x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid x>\frac{1}{n}\right\}$，则 $\exists\, n_0\in\mathrm{N}$，使得 $x_0\in\left\{x\mid x>\frac{1}{n_0}\right\}$，即 $x>\frac{1}{n_0}>0$，从而 $x_0\in\{x\mid x>0\}$，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid x>\frac{1}{n}\right\}\subset\{x\mid x>0\}$.

综上知 $\{x\mid x>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid x>\frac{1}{n}\right\}$.

[**1.7**] 设 N 为自然数集，N_e 为正偶数集，N 与 N_e 对等吗？

答 N 与 N_e 是对等的. 在 N 与 N_e 上建立映射 $f:\mathrm{N}\to N_e$，$f(n)=2n\ (n\in\mathrm{N})$，显然 $f:\mathrm{N}\to N_e$ 是一一映射，故 $\mathrm{N}\sim N_e$.

[**1.8**] R^1 上以有理数为端点的区间的全体所成之集与自然数集之间能否建立一一对应？

答 能建立一一对应关系.

事实上，设直线上的全体有理点为 $a_1,a_2,\cdots$，令 $A_{ij}=(a_i,a_j)$ $(i\neq j,a_i<a_j)$，则 $\{A_{ij}\}$ 可如下排成序列：

$$
\begin{array}{llllll}
A_{12}, & A_{13}, & A_{14}, & \cdots, & A_{1n}, & \cdots \\
 & A_{23}, & A_{24}, & \cdots, & A_{2n}, & \cdots \\
 & & A_{34}, & \cdots, & A_{3n}, & \cdots \\
 & & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

令 $1\to A_{12},2\to A_{13},3\to A_{23},4\to A_{14},5\to A_{24},6\to A_{34},\cdots$

即 $\{A_{ij}\}$ 与 N 之间建立了一一对应关系.

[**1.9**] 为什么说任何无限集 A 都包含有可列子集？

答 因为在任何无限集 A 中总可挑出一个可列子集.

事实上，A 非空，任取 $a_1\in A$，$A-\{a_1\}$ 也非空，否则 $A=\{a_1\}$ 与 A 为无限集矛盾，所以任取 $a_2\in A-\{a_1\}$，由于 $A-\{a_1,a_2\}$ 非空，否则 A 为 $\{a_1,a_2\}$ 矛盾，所以任取 $a_3\in A-\{a_1,a_2\}$，如此下去，设已从 A 中取出了 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，由于 $A-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 非空，否

则 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$为有限集矛盾，所以任取 $a_{n+1}\in A-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},\cdots$，因此，在 A 中必可取出一可列子集$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$.

[1.10] 怎样建立无限集与它的一个真子集的一一对应关系？

答 设 A 为无限集，则 A 必有一个可列子集 $A^*=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，令 $A_0=A-A^*$，则有 $A=A_0\cup A^*$.

令 $\hat{A}=A_0\cup\{a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$，则 $\hat{A}$ 是 A 的真子集，作 A 到 $\hat{A}$ 的映射 f，使 $f(a_n)=a_{n+1}$，$\forall\ n$，而当 $x\in A_0$ 时，令 $f(x)=x$. 显然 $f:A\to\hat{A}$ 为一一映射，即 $A\sim\hat{A}$.

[1.11] 由直线上互不相交的开间隔所成之集是至多可列集吗？

答 是.

因为设$G=\{I\}$为直线 R 上互不相交的开间隔所成之集. 其中 I 为 R 上的开间隔.

对$\forall\ I,J\in G$，有 $I\cap J=\varnothing$，由有理数的稠密性知，在每一 I 中至少含有一个有理数，故从 G 中每一个开间隔中取定一个有理数 r 组成集合 A，因为 G 中开间隔互不相交，所以 A 中的有理数彼此不同，令 G 中的开间隔 I 与 I 中取定的有理数对应，显然这种对应是一一的，由于 A 是有理数集 Q 的子集，而 Q 为可列集，所以 A 为至多可列集，即 G 也为至多可列集.

注 此结论常可用来证明至多可列集的有关问题.

[1.12] 为什么说平面上顶点具有有理坐标的三角形所成之集是可列集？

答 因为设 M 为平面上顶点具有有理坐标的三角形所成之集，由于有理数集 Q 是可列集，平面上的三角形由三个顶点所确定，而每个顶点由两个数决定，故六个数可确定一个三角形，所以 M 中的每个元素由 Q 中六个相互独立的数所确定，即 $M=\{a_{x_1x_2\cdots x_6}\,|\,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\in Q\}$，所以 M 为可列集.

[1.13] 设 A 为平面上以有理点为中心，以有理数为半径的圆所组成的集合，则 A 为可列集.

解 因有理数集 Q 为可列集，令

$$B=\{b_{xyz},x,y,z\in Q\},$$

由于 B 中的元素 b_{xyz} 依赖于三个独立的有理数，所以 B 为可列集.

对 A 中的每个元素 a，它的圆心为有理点 (x_r,y_r)，半径为有理数 z_r，作映射 $\varphi:A\to B$，使

$$\varphi(a)=b_{x_r y_r z_r}\in B,$$

则 φ 是 A 到 B 的一一映射，故 A 与 B 的一个子集对等，而 B 为可列集，故 A 为至多可列集，又 A 为无限集，所以 A 必为可列集.

[1.14] 设 B 为自然数列的全体所成之集，N 为自然数集，$B\sim N$ 对吗？

答 B 与 N 不对等.

用反证法，假设 $B\sim N$，则 B 为可列集，由对等定义知，可建立 B 的元素与 N 的元素之间的一一对应，故对 $\forall\ i\in N$，有且仅有一个无穷序列 $\{n_k\}$ 与之对应，现把与自然数 i 对应的序列 $\{n_k\}$ 记为 $\{n_{ik}\}$，于是可将 B 的全体元素排列如下：

$\{n_{1k}\}$：n_{11}，n_{12}，n_{13}，…，n_{1k}，…

$\{n_{2k}\}$：n_{21}，n_{22}，n_{23}，…，n_{2k}，…

………………

$\{n_{kk}\}$：n_{k1}，n_{k2}，n_{k3}，…，n_{kk}，…

………………

现在考察序列 $n_{11}+1,n_{22}+1,\cdots,n_{kk}+1,\cdots$，可见此数列与排列起来的每一无穷序列都不同，故它不是 B 的元素，但是 $n_{ii}+1$ 都是自然数，因此它又应是 B 的元素，矛盾，因此 B 与 N 不对等.

注 此结论说明了“由各项均为自然数的无穷数列全体所成之集是不可列集”.

二、集合的运算及性质

[1.15] 证明 $A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$.

证 先证 $A-B=A-(A\cap B)$.

右边 $=A-(A\cap B)=A\cap\mathscr{C}(A\cap B)$

$\quad=A\cap(\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}B)=(A\cap\mathscr{C}A)\cup(A\cap\mathscr{C}B)$

$=\varnothing\cup(A\cap\mathscr{C}B)=A\cap\mathscr{C}B=A-B=$左边.

再证 $A-B=(A\cup B)-B$.

右边$=(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap\mathscr{C}B$

$=(A\cap\mathscr{C}B)\cup(B\cap\mathscr{C}B)=(A-B)\cup\varnothing$

$=A-B=$左边.

[**1.16**] 证明:(1) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$;

(2) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$.

证 (1) $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(A\cap\mathscr{C}C)$

$=A\cap(\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}C)=A\cap\mathscr{C}(B\cup C)=A-(B\cup C)$;

(2) $(A-C)\cup(B-C)=(A\cap\mathscr{C}C)\cup(B\cap\mathscr{C}C)$

$=(A\cup B)\cap\mathscr{C}C=(A\cup B)-C$.

[**1.17**] 证明 $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

证 $(A-B)\cup(A\cap C)=(A\cap\mathscr{C}B)\cup(A\cap C)$

$=A\cap(\mathscr{C}B\cup C)=A\cap[\mathscr{C}B\cup\mathscr{C}(\mathscr{C}C)]$

$=A\cap\mathscr{C}(B\cap\mathscr{C}C)=A\cap\mathscr{C}(B-C)$

$=A-(B-C)$.

注 1° 若按集合相等的定义证明,即证左右相互包含,则要讨论各种情形,过程太繁,这种证明方法不可取.

2° 本题的直接推论有许多,诸如:

i) $A-(A-B)=A\cap B$;

ii) $A-(B-C)\subset(A-B)\cup C$;

iii) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$ 的充要条件是 $C=A$. 读者可相仿给出证明.

[**1.18**] 证明$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$

证 $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(C\cap\mathscr{C}D)$

$=(A\cap C)\cap(\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}D)=(A\cap C)\cap\mathscr{C}(B\cup D)$

$=(A\cap C)-(B\cup D)$.

注 此题结论在以后多处用到,请读者留心.

[**1.19**] 证明对于任意的集族$\{A_\alpha\}$,成立以下笛摩根公式:

(1) $\mathscr{C}(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha)=\bigcap\limits_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$;

(2) $\mathscr{C}(\bigcap_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$.

证 (1) $\forall x\in\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha)\Longleftrightarrow x\overline{\in}\bigcup_\alpha A_\alpha\Longleftrightarrow$对一切 α 有 $x\overline{\in}A_\alpha$ $\Longleftrightarrow$对一切 α 有 $x\in\mathscr{C}A_\alpha\Longleftrightarrow x\in\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$.

故 $\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$.

(2) $\forall x\in\mathscr{C}(\bigcap_\alpha A_\alpha)\Longleftrightarrow x\overline{\in}\bigcap_\alpha A_\alpha\Longleftrightarrow\exists$ 某 α_0,使 $x\overline{\in}A_{\alpha_0}\Longleftrightarrow\exists$ 某α_0,使 $x\in\mathscr{C}A_{\alpha_0}\Longleftrightarrow x\in\bigcup_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$.

故 $\mathscr{C}(\bigcap_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$.

注 1° 笛摩根公式用处很多,它能通过"余"运算把交、并互化.

2° 此题还有以下推论:

i) $(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)-B=\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k-B)$;

ii) $(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k)-B=\bigcap_{k=1}^{\infty}(A_k-B)$;

iii) $S-\bigcap_\alpha A_\alpha=\bigcup_\alpha(S-A_\alpha)$;

iv) $S-\bigcup_\alpha A_\alpha=\bigcap_\alpha(S-A_\alpha)$.

读者可利用笛摩根公式给出证明.

[1.20] 证明对于任集族$\{A_\alpha\}$成立如下等式:

(1) $(\bigcup_\alpha A_\alpha)\cap B=\bigcup_\alpha(A_\alpha\cap B)$

(2) $(\bigcap_\alpha A_\alpha)\cup B=\bigcap_\alpha(A_\alpha\cup B)$

证 (1) $\forall x\in(\bigcup_\alpha A_\alpha)\cap B$,则 $x\in\bigcup_\alpha A_\alpha$ 且 $x\in B$,从而,$\exists$ 某 α_0,使 $x\in A_{\alpha_0}$且 $x\in B$,即 $x\in A_{\alpha_0}\cap B$,所以 $x\in\bigcup_\alpha(A_\alpha\cap B)$.

故 $(\bigcup_\alpha A_\alpha)\cap B\subset\bigcup_\alpha(A_\alpha\cap B)$.

反之,$\forall x\in\bigcup_\alpha(A_\alpha\cap B)$,则$\exists$ α_0,使 $x\in A_{\alpha_0}\cap B$,从而 $x\in A_{\alpha_0}$且 $x\in B$,故 $x\in\bigcup_\alpha A_\alpha$ 且 $x\in B$,即 $x\in(\bigcup_\alpha A_\alpha)\cap B$.

故 $(\bigcup_\alpha A_\alpha)\cap B\supset\bigcup_\alpha(A_\alpha\cap B)$.

综上知 $(\bigcup_\alpha A_\alpha)\cap B=\bigcup_\alpha(A_\alpha\cap B)$.

(2) $\forall\ x\in(\bigcap_{\alpha}A_{\alpha})\cup B\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha}A_{\alpha}$ 或 $x\in B\Longleftrightarrow$ 对一切 α，有 $x\in A_{\alpha}$ 或 $x\in B\Longleftrightarrow$ 对一切 α，有 $x\in A_{\alpha}\cup B\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha}(A_{\alpha}\cup B)$.

即 $(\bigcap_{\alpha}A_{\alpha})\cup B=\bigcap_{\alpha}(A_{\alpha}\cup B)$.

另证 (2) 由于 $\mathscr{C}[\bigcap_{\alpha}(A_{\alpha}\cup B)]=\bigcup_{\alpha}[\mathscr{C}(A_{\alpha}\cup B)]$

$$=\bigcup_{\alpha}(\mathscr{C}A_{\alpha}\cap\mathscr{C}B)=\bigcup_{\alpha}(\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}A_{\alpha})$$

$$=\mathscr{C}B\cap(\bigcup_{\alpha}\mathscr{C}A_{\alpha})=\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha}A_{\alpha})$$

$$=\mathscr{C}[B\cup(\bigcap_{\alpha}A_{\alpha})]=\mathscr{C}[(\bigcap_{\alpha}A_{\alpha})\cup B].$$

两边同时取余有 $(\bigcap_{\alpha}A_{\alpha})\cup B=\bigcap_{\alpha}(A_{\alpha}\cup B)$.

注 本题(1)的证明利用集合相等的定义，推出两边相互包含，篇幅较大，但却是基本方法. 而(2)的证明利用等价条件，从而较为简略，特别(2)的另证利用笛摩根公式较富有特点，这些都是必须掌握的基本方法.

[1.21] 设 X 是固定集，$A\subset X$，$\chi_A(x)$ 是集 A 的特征函数，证明：

(1) $A=X\Longleftrightarrow\chi_A(x)=1$；$A=\varnothing\Longleftrightarrow\chi_A(x)=0$；

(2) $A=B\Longleftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x)$；

(3) $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_{\alpha}}(x)=\max\limits_{\alpha}\chi_{A_{\alpha}}(x)$，

$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_{\alpha}}(x)=\min\limits_{\alpha}\chi_{A_{\alpha}}(x)$.

证 (1) 设 $\chi_A(x)=1$，若 $A\neq X$，则 $\exists\ x_0\in X$，$x_0\overline{\in}A$，即 $\chi_A(x_0)=0$，矛盾. 故 $A=X$.

若 $A=X$，必有 $\chi_A(x)=1$.

故 $A=X\Longleftrightarrow\chi_A(x)=1$.

若 $A=\varnothing$，则 $\forall\ x\in X$，有 $x\overline{\in}A$，因而 $\chi_A(x)=0$；反之，若 $\chi_A(x)=0$，则对 $\forall\ x\in X$ 都有 $x\overline{\in}A$，故 $A=\varnothing$.

从而 $A=\varnothing\Longleftrightarrow\chi_A(x)=0$.

(2) 由于 $A\subset B\Longleftrightarrow x\in A$ 必有 $x\in B\Longleftrightarrow\chi_A(x)=1$，必有 $\chi_B(x)=1\Longleftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$.

即 $A\subset B\Longleftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$.

同理可知　$A\supset B\Longleftrightarrow\chi_A(x)\geqslant\chi_B(x)$.

于是，$A=B\Longleftrightarrow A\subset B$ 且 $A\supset B\Longleftrightarrow\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$，且 $\chi_A(x)\geqslant\chi_B(x)\Longleftrightarrow\chi_A(x)=\chi_B(x)$.

(3) 先证 $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$.

$\forall\ x_0\in X$，若 $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x_0)=1$，则 $x_0\in\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$，从而 $\exists\ \alpha_0\in N$，使 $x_0\in A_{\alpha_0}$，于是 $\chi_{A_{\alpha_0}}(x_0)=1$，故 $\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)=1$，

即
$$\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x).$$

若 $\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x_0)=0$，则 $x_0\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha$，从而，$\forall\ \alpha\in N$，都有 $x_0\overline{\in}A_\alpha$，因此 $\forall\ \alpha\in N$，$\chi_{A_\alpha}(x_0)=0$，所以 $\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x_0)=0$，

综上知　$\chi_{\bigcup\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$.

同理可证　$\chi_{\bigcap\limits_{\alpha\in N}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in N}\chi_{A_\alpha}(x)$.

[1.22]　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是两两不相交的集列，$B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 也是两两不相交的集列，若 $A_n\sim B_n(n=1,2,\cdots)$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,\ \bigcup_{n=1}^{m}A_n\sim\bigcup_{n=1}^{m}B_n(m=1,2,\cdots)$$

证　由于 $A_n\sim B_n(n=1,2,\cdots)$，故存在一一映射 $f_n:A_n\to B_n$.

作映射 $f:\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\to\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，使 $f(x)=f_n(x)$，$\forall\ n$，显然 f 是一一映射，并且把 f 限制在 $\bigcup\limits_{n=1}^{m}A_n$ 上，则 f 是 $\bigcup\limits_{n=1}^{m}A_n\sim\bigcup\limits_{n=1}^{m}B_n$ 的一一映射.

[1.23]　证明 $R^1\sim[0,1]\sim(0,1)\sim(a,b)$.

证　(1) 定义 $f:R^1\to(0,1)$，使

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2},(x\in R).$$

显然 f 是 R^1 到 $(0,1)$ 的一一映射，故 $R\sim(0,1)$.

(2) 记 M 为 $(0,1)$ 中的无理点所成之集，Q 为 $(0,1)$ 中有理点所成之集，由于 Q 为可列集，不妨设 $Q=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$，故 $(0,1)=M\cup Q$，从而 $[0,1]=M\cup Q\cup\{0,1\}$，作下列映射：

$\forall\ x\in M$，$x\mapsto x$，且 $0\mapsto r_1$，$1\mapsto r_2$，$r_1\mapsto r_3$，$\cdots$，$r_n\mapsto r_{n+2}$

$(n=1,2,\cdots)$.

则$[0,1]$与$(0,1)$之间建立了一一映射，从而

$$[0,1]\sim(0,1).$$

(3) 令 $\varphi(x)=\dfrac{x-a}{b-a},x\in(a,b)$

则 φ 是(a,b)与$(0,1)$之间的一一映射，即

$$(a,b)\sim(0,1).$$

综合(1),(2),(3)得：

$$\mathrm{R}^1=(-\infty,+\infty)\sim[0,1]\sim(0,1)\sim(a,b).$$

[1.24] 设 A_1,A_2 是两个不相交的集，B_1,B_2 也是两个不相交的集，又设 $\varphi_1:A_1\to B_1,\varphi_2:A_2\to B_2$ 是两个一一对应. 假设 $A_1\subset A_2,B_1\subset B_2$，问是否存在 A_2-A_1 到 B_2-B_1 上的一一对应.

解 因 $A_1\cap A_2=\varnothing,B_1\cap B_2=\varnothing$，令

$$\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x),x\in A_1\\ \varphi_2(x),x\in A_2\end{cases}$$

则 $\varphi:A_1\cup A_2\to B_1\cup B_2$ 是一一对应.

若 $A_1\subset A_2,B_1\subset B_2$，则 A_2-A_1 与 B_2-B_1 之间不一定存在一一对应.

例如：$A_1=\{2,3,\cdots\},B_1=\{3,4,\cdots\}$,

$A_2=B_2=\{1,2,3,\cdots\}$,

由于 $A_1\cap A_2\neq\varnothing,B_1\cap B_2\neq\varnothing$，则

$$\varphi_1:n\mapsto n+1\ (n=2,3,\cdots)$$

是 A_1 到 B_1 的一一对应.

$$\varphi_2:n\mapsto n\ (n=1,2,\cdots)$$

是 A_2 到 B_2 的一一对应.

显然 $A_2-A_1=\{1\}$ 与 $B_2-B_1=\{1,2\}$ 间不存在任何一一对应.

[1.25] 证明：若 $A-B\sim B-A$，则 $A\sim B$.

证 由于 $A=(A-B)\cup(A\cap B)$

$B=(B-A)\cup(A\cap B)$

并且 $A-B$ 与 $A\cap B$ 不相交，$B-A$ 与 $A\cap B$ 也不相交，而已知

$A-B\sim B-A$，故可在 A 与 B 之间建立如下的一一对应：

$$A-B\sim B-A$$
$$A\cap B\sim A\cap B$$

则 $A=(A-B)\cup(A\cap B)\sim(B-A)\cup(A\cap B)=B.$

即 $$A\sim B.$$

[1.26] 设 $\{A_n\}$ 为一集列：

(1) 作 $B_1=A_1, B_n=A_n-\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k\ (n>1)$，证明 $\{B_n\}$ 为一列互不相交的集，且

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\bigcup_{k=1}^{n}B_k\quad(n=1,2,\cdots).$$

(2) 如果 $\{A_n\}$ 是单调减少的集列，证明

$$A_1=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_n-A_{n+1})\cup\cdots\cup(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k),$$

并且其中各项互不相交.

证 (1) 对任意两个自然数 n,m，不妨设 $m>n$，则 $m-1\geqslant n$，而利用笛摩根公式易知：

$$(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)\qquad(*)$$

从而

$$B_m\cap B_n=(A_m-\bigcup_{k=1}^{m-1}A_k)\cap(A_n-\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k)$$
$$\xlongequal{\text{由}(*)\text{式}}(A_m\cap A_n)-[(\bigcup_{k=1}^{m-1}A_k)\cup(\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k)]$$
$$=A_m\cap A_n-\bigcup_{k=1}^{m-1}A_k\subset A_n-\bigcup_{k=1}^{m-1}A_k\xlongequal{m-1\geqslant n}\varnothing,$$

故 $B_m\cap B_n=\varnothing$，说明 $\{B_n\}$ 为一列互不相交的集.

另外，由于

$$B_n=A_n-(\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k)\subset A_n,$$

故 $$\bigcup_{k=1}^{n}B_k\subset\bigcup_{k=1}^{n}A_k.$$

另一方面，若 $x\in\bigcup_{k=1}^{n}A_k$，则存在 $k_0, 1\leqslant k_0\leqslant n$，使 $x\in A_{k_0}$.

下面证明 $x\in\bigcup_{k=1}^{n}B_k$.

反证法，如若不然，$x \overline{\in} \bigcup_{k=1}^{n} B_k$，则对一切 k $(1 \leqslant k \leqslant n)$，有 $x \overline{\in} B_k$，特别当 $k=k_0$ 时，有

$$x \overline{\in} B_{k_0} = A_{k_0} - \left(\bigcup_{n=1}^{k_0-1} A_n\right),$$

从而 $x \overline{\in} A_{k_0}$ 矛盾. 故 $x \in \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. 所以

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

于是，$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. 从而证得(1).

(2) 由于 $\{A_n\}$ 为单减集列，即

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

从而 $A_1 \supset (A_1 - A_2), A_1 \supset (A_2 - A_3), \cdots, A_1 \supset (A_n - A_{n+1}), \cdots$

且 $A_1 \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$，故

$$A_1 \supset (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

下面证明：

$$A_1 \subset (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

$\forall x \in A_1$，若 $\forall n$，$x \in A_n$，则 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

从而

$$x \in (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

若 $x \overline{\in} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$，注意到 $\{A_n\}$ 是单减集列，则存在 n，使 $x \in A_n$，且 $x \overline{\in} A_{n+1}$. 则 $x \in A_n - A_{n+1}$，从而也有

$$x \in (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n+1}) \cdots \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

故 $A_1 \subset (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$.

综上知

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n+1}) \cup \cdots \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

再证 $A_1-A_2, A_2-A_3, \cdots, A_n-A_{n+1}, \cdots, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 互不相交.

由于 $\{A_n\}$ 为单减集列，故当 $k<m$ 时，有

$$A_k \cap A_m = A_m, A_k \cup A_m = A_k,$$

且对 $\forall\ n$，显然有 $(A_n-A_{n+1}) \cap (\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)=\varnothing$.

从而对任何自然数 k 与 m（不妨设 $k<m$），注意到 $\{A_n\}$ 的单减性有：

$$(A_k-A_{k+1}) \cap (A_m-A_{m+1}) \xlongequal{\text{由}(*)\text{式}}$$
$$(A_k \cap A_m)-(A_{k+1} \cup A_{m+1})=A_m-A_{k+1}=\varnothing.$$

即 $A_1-A_2, A_2-A_3, \cdots, A_n-A_{n+1}, \cdots, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ 互不相交.

[1.27]　设 $\overline{A}$ 与 $\underline{A}$ 分别为集列 $\{A_n\}$ 的上极限与下极限，证明：

(1) $\overline{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$，$\underline{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$；

(2) $\overline{A} \supset \underline{A}$；

(3) $\{A_n\}$ 单增时，有 $\overline{A}=\underline{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$；

(4) $\{A_n\}$ 单减时，有 $\overline{A}=\underline{A}=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

证　(1) 设 $Q=\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

$\forall\ x \in \overline{A}$，由上限集的定义知，$x$ 属于 $\{A_n\}$ 中的无限多个集. 不妨设 x 同时属于下列各集：

$$A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots, A_{n_k}, \cdots$$

其中 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，因此，对任何自然数 n，当 $n_k>n$ 时，就有：

$$x \in A_{n_k} \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

故有 $x \in Q$，即 $\overline{A} \subset Q$.

反之，若 $x \in Q$，则对 $\forall\ n$，$x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$，取 $n=n_1+1$，则 $x \in$

$\bigcup\limits_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$，故必存在 n_2，使 $x\in A_{n_2}$，…，如此下去，得到 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，且 $x\in A_{n_k}(k=1,2,\cdots)$. 由上限集定义知：$x\in\overline{A}$，即 $Q\subset\overline{A}$，所以有

$$\overline{A}=Q=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.$$

下证 $\underline{A}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$.

记 $P=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$. $\forall\, x_0\in\underline{A}$，由下限集定义知，对给定的 x_0，$\exists\, n_0$，当 $k>n_0$ 时，就有 $x_0\in A_k$，从而 $x_0\in\bigcap\limits_{k=n_0}^{\infty}A_k$，故 $x_0\in P$，即 $\underline{A}\subset P$.

反之，若 $x_1\in P$，则$\exists\, n_1$，使 $x_1\in\bigcap\limits_{k=n_1}^{\infty}A_k$，即当 $k>n_1-1$ 时，就有 $x_1\in A_k$，由下限集定义知，$x_1\in\underline{A}$，故 $\underline{A}\supset P$，所以

$$\underline{A}=P=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

(2) 证 $\underline{A}\subset\overline{A}$.

$\forall\, x_0\in\underline{A}$，则由下限集定义知，$\exists\, n_0$，当 $n>n_0$ 时，有 $x_0\in A_n$ $(n=n_0+1,n_0+2,\cdots)$，从而 x_0 属于无穷多个 A_n，故由上限集定义知，$x_0\in\overline{A}$，即 $\underline{A}\subset\overline{A}$.

(3) 由(2)知 $\underline{A}\subset\overline{A}$.

由于$\{A_n\}$单增，即

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$$

若 $x\in\overline{A}$，则 x 属于$\{A_n\}$中无穷多个集$\{A_{n_k}\}$，把下标最小的记为 A_{k_0}，则当 $x\in A_{k_0}$时，有

$$x\in A_{k_0}\subset A_{k_0+1}\subset\cdots\subset A_{k_0+n}\subset\cdots$$

从而$\exists\, k_0\in\mathrm{N}$，当 $n>k_0$ 时，$x\in A_n$，由下限集定义知 $x\in\underline{A}$，即 $\overline{A}\subset\underline{A}$.

综上知，当$\{A_n\}$单增时，$\overline{A}=\underline{A}$.

又$\{A_n\}$单增时有

$$A_n \subset A_{n+1} \subset A_{n+2} \subset \cdots \subset A_{n+k} \subset \cdots$$

故 $A_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$，从而

$$\underline{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

故 $\overline{A} = \underline{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$

(4) 由(2)知 $\underline{A} \subset \overline{A}$.

由于$\{A_n\}$单减，即

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset A_{n+2} \supset \cdots$$

故 $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$，从而

$$\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

显然

$$\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k) = \underline{A},$$

即 $\overline{A} \subset \underline{A}$.

综上知，当$\{A_n\}$单减时有

$$\overline{A} = \underline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

[1.28] 设 $A_{2n-1} = \left(0, \frac{1}{n}\right)$，$A_{2n} = (0, n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，求集列$\{A_k\}$的上极限集和下极限集.

解 由于$\{A_{2n-1}\}$单减，$\{A_{2n}\}$单增，且对$\forall\ n$及$\forall\ k$，有 $A_{2n-1} \subset A_{2k}$，及 $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_{2n} = (0, \infty)$，$\bigcap_{n=k}^{\infty} A_{2n-1} = \varnothing$，所以对$\forall\ n$有：

$$\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{2k \geqslant n}^{\infty} A_{2k} = (0, +\infty)$$

$$\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{2k-1 \geqslant n}^{\infty} A_{2k-1} = \varnothing$$

因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \infty) = (0, \infty)$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varnothing = \varnothing$$

即　　$\overline{A}=(0,+\infty)$，$\underline{A}=\varnothing$.

[1.29]　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数，则对任何实数 a 有

$$\{x\mid f(x)=a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\right\}.$$

证　(i) 设 $x_0\in\{x\mid f(x)=a\}$，则 $f(x_0)=a$，于是，对 $\forall\ n\in\mathrm{N}$ 有

$$a\leqslant f(x_0)<a+\frac{1}{n},$$

故　$x_0\in\left\{x\mid a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n},\forall\ n\in\mathrm{N}\right\}$

从而　$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\right\}$，

即　$\{x\mid f(x)=a\}\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\right\}$.

(ii) $\forall\ x_1\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\right\}$，假设 $x_1\overline{\in}\{x\mid f(x)=a\}$，则 $f(x_1)\neq a$，当 $f(x_1)>a$ 时，$\exists\ n_0\in\mathrm{N}$，使

$$f(x_1)\geqslant a+\frac{1}{n_0},$$

从而　$x_1\overline{\in}\left\{x\mid a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n_0}\right\}$，

当然　$x_1\overline{\in}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\right\}$.

若当 $f(x_1)<a$ 时，则对 $\forall\ n\in\mathrm{N}$，有

$$x_1\overline{\in}\left\{x\mid a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\right\},$$

故　$$x_1\overline{\in}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\right\}.$$

总之，不论 $f(x_1)>a$ 还是 $f(x_1)<a$，都有

$$x_1\overline{\in}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\right\},$$

矛盾. 从而 $x_1\in\{x\mid f(x)=a\}$.

综上知

$$\{x\mid f(x)=a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid a\leqslant f(x)<a+\frac{1}{n}\right\}.$$

[1.30] 设$\{f_n(x)\}$为$E=[a,b]$上的实函数列，并且

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

证明：对任何实数c，有$E[f(x)>c]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f_n(x)>c]$.

证 $\forall\, x_0\in E[f(x)>c]$，有$f(x_0)>c$，由题设

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)>c,$$

故由极限的保号性，$\exists\, N$，当$n>N$时，有$f_n(x_0)>c$，

于是 $$x_0\in E[f_n(x)>c]\quad(n=N+1,N+2,\cdots).$$

从而 $$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f_n(x)>c],$$

故 $$E[f(x)>c]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f_n(x)>c].$$

反之，$\forall\, x_1\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f_n(x)>c]$，则$\exists\, N$，使

$$x_1\in E[f_N(x)>c],$$

则有$f_N(x_1)>c$，不妨设

$$f_N(x_1)\geqslant c+\alpha\quad(\alpha>0),$$

由函数列的单增性知：

$$c+\alpha\leqslant f_N(x_1)\leqslant f_{N+1}(x_1)\leqslant\cdots,$$

再由极限的保号性知：

$$f(x_1)=\lim_{n\to\infty}f_n(x_1)\geqslant c+\alpha\quad(\alpha>0),$$

所以

$$f(x_1)\geqslant c+\alpha>c,$$

即 $$x_1\in E[f(x)>c].$$

故 $$E[f(x)>c]\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f_n(x)>c].$$

综上有

$$E[f(x)>c]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f_n(x)>c].$$

[1.31] 设$f(x)$是定义在集合E上的实函数，c为任意实数．若有一列单减数列$\{a_n\}$，且$a_n\searrow c\ (n\to\infty)$，则

$$E[f(x)>c]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f(x)>a_n].$$

证　$\forall\, x\in E[f(x)>c]$，则 $f(x)>c$，故设

$$\varepsilon=\frac{f(x)-c}{2}>0,$$

则 $f(x)>c+\varepsilon>c$，又由于

$$a_n\geqslant c,\ a_n\downarrow c\ (n\to\infty)$$

故对 $\varepsilon=\dfrac{f(x)-c}{2}>0$，$\exists\ N$，当 $n>N$ 时，$a_n<c+\varepsilon$。

从而，当 $n>N$ 时有

$$f(x)>c+\varepsilon>a_n,$$

所以
$$x\in E[f(x)>a_n],$$

即
$$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f(x)>a_n],$$

故

$$E[f(x)>c]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f(x)>a_n].$$

反之，$\forall\ x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f(x)>a_n]$，则$\exists\ n$，使

$$x\in E[f(x)>a_n],$$

故 $f(x)>a_n$，但 $a_n\downarrow c(n\to\infty)$，$a_n\geqslant c$，所以

$$f(x)>c,$$

即
$$x\in E[f(x)>c],$$

故
$$E[f(x)>c]\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f(x)>a_n].$$

综上有

$$E[f(x)>c]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[f(x)>a_n].$$

[1.32]　设$[a,b]$上的实函数列$\{f_n(x)\}$具有极限函数 $f(x)$，$E_n(h)$为$[a,b]$上使 $f_n(x)>h$ 的点的全体$(n=1,2,\cdots)$，$E(h)$为$[a,b]$上使 $f(x)>h$ 的点的全体，证明

$$E(h)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E_n\left[h+\frac{1}{k}\right].$$

证 (i) 设 $x\in E(h)$，则 $f(x)>h$，故$\exists$ k，使 $f(x)>h+\frac{1}{k}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)>h+\frac{1}{k},$$

由极限的保号性知，$\exists$ N，当 $n>N$ 时，

$$f_n(x)>h+\frac{1}{k},$$

故

$$x\in E_n\left(h+\frac{1}{k}\right),$$

即$\exists$ N，当 $n>N$ 时，$x\in E_n\left(h+\frac{1}{k}\right)$，由下限集定义知

$$x\in \underline{\lim_{n\to\infty}}E_n\left(h+\frac{1}{k}\right).$$

所以

$$x\in \bigcup_{k=1}^{\infty}\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n\left(h+\frac{1}{k}\right).$$

即

$$E(h)\subset \bigcup_{k=1}^{\infty}\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n\left(h+\frac{1}{k}\right).$$

(ii) 设 $x\in \bigcup_{k=1}^{\infty}\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n\left(h+\frac{1}{k}\right)$，则$\exists$ k，使

$$x\in \underline{\lim_{n\to\infty}}E_n\left(h+\frac{1}{k}\right),$$

由下限集定义知，$\exists$ N，当 $n>N$ 时有

$$x\in E_n\left(h+\frac{1}{k}\right),$$

即

$$f_n(x)>h+\frac{1}{k}\quad (n\geqslant N),$$

由极限的不等性得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\geqslant h+\frac{1}{k}>h,$$

从而

$$f(x)>h,\ x\in E(h),$$

即

$$E(h)\supset \bigcup_{k=1}^{\infty}\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n\left(h+\frac{1}{k}\right).$$

综上有

$$E(h)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}E_n\left(h+\frac{1}{k}\right).$$

三、无限集的若干性质

[1.33] 试证，可列集的任何无限子集仍是可列集.

证 设 A 为可列集，则 A 可表示为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},$$

若 B 是 A 的无限子集，则在 A 中从 a_1 起按顺序不时会遇到 B 的元素，记遇到的第一个 B 的元素的下标为 n_1，遇到的第二个 B 的元素的下标为 n_2，…，遇到的第 k 个 B 的元素的下标为 n_k，…，由于 B 是 A 的无限子集，因此这种下标不会终止，于是

$$B=\{a_{n_1},a_{n_2},a_{n_3},\cdots,a_{n_k},\cdots\}.$$

记 $b_k=a_{n_k}$，则

$$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_k,\cdots\},$$

即 B 为可列集.

注 可列集 A 的任何子集 A^* 是至多可列集.

[1.34] 证明：至多可数个至多可数集的并集是至多可数集.

证 不失一般性，设有一集列

$$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$$

其中每一个都是可数集.

将它们排列如下：

$$\begin{array}{l}
A_1:\ a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \cdots,\ a_{1n},\ \cdots,\\
A_2:\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \cdots,\ a_{2n},\ \cdots,\\
A_3:\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ \cdots,\ a_{3n},\ \cdots,\\
\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
A_n:\ a_{n1},\ a_{n2},\ a_{n3},\ \cdots,\ a_{nn},\ \cdots,\\
\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots
\end{array}$$

称 $p+q=h$ 为元素 $a_{pq}(p,q=1,2,\cdots)$ 的高度，按高度的大小编号，在同一高度中按 q 的值由小到大编号，这样就可将 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 中的所有元素排成一列(按箭头方向)：

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \cdots, a_{n1}, a_{(n-1)2}, a_{(n-2)3}, \cdots, a_{1n}, \cdots$$

因为 $A_i, A_j (i \neq j)$ 可能有相同元素，这些元素在并集中是同一元素，在这一序列中去掉重复元素后的余集仍是可数集，故可数个可数集的并集仍为可数集. 当然有至多可数个至多可数集是至多可数集.

注 1° 上面证明过程中的排列方法称为按对角线方向排列，排列的方法还有其它各种方法.

2° 作为特殊情形，还有以下结论：

i) 有限个可数集的并集是可数集；

ii) 可数个有限集的并集是至多可数集；

iii) 有限个有限集的并集是有限集；

3° 可数集与可列集意义相同，今后我们不加区别.

[1.35] 证明：平面上在直角坐标系下的所有格点(两坐标都为整数的点)所成之集是可数集.

证 对每一个固定的整数 n，令

$$A_n = \{(n, m) \mid m \text{ 是任意整数}\},$$

由于 A_n 是可数集，而 $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n$ 是可数个可数集的并集，所以 $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n$ 也是可数集，故平面上的全体格点所成之集为 $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n$ 是一个可数集.

[1.36] 证明：

(1) 有理系数多项式全体所成之集是可数集；

(2) 整系数多项式全体所成之集是可数集.

证 (1) 设 A 为所有系数为有理数的多项式全体所成之集，A_n 为所有系数为有理数的 n 次多项式全体所成之集，即

$$A_n = \{P_n(x) \mid P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$
$$a_0 \neq 0, a_0, a_1, \cdots, a_n \text{ 为有理数}\},$$

于是
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

由于 A_n 中任一元素 $P_n(x)$ 由 $n+1$ 个互相独立的记号 $a_0, a_1,$

$a_2,\cdots,a_n$ 所决定，而每一个记号各自独立地跑遍一个可数集，故 A_n 为可数集，从而 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 为可数个可数集的并集，所以，A 为可数集.

(2) 完全利用(1)的方法可证此结论. 下面采用另一证法.

对于固定的自然数 n，记 n 次整系数多项式全体为 B_n，即

$$B_n=\{P_n(x)\mid P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}k_ix^{n-i},k_0\neq 0,k_i(i=0,1,2,\cdots,n)\text{ 为整数}\},$$

另设 $D=\{(k_0,k_1,k_2,\cdots,k_n)\mid k_i(i=0,1,2,\cdots,n)\text{为整数}\}$

则 D 中元素可由 $n+1$ 个独立记号决定，且各个记号独立跑遍一个可数集，故 D 为可数集.

令 B_n 中元素的系数 $(k_0,k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 与 D 中元素 $(k_0,k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 对应，则对应是一一的，从而 B_n 为可数集，于是，整系数多项式全体所成之集 $B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ 为可数集.

注 整系数多项式的实根称为代数数，不是代数数的实数称为超越数.

[**1.37**] 证明：

(1) 代数数全体是可数集且势为 a；

(2) 超越数全体所成之集具有连续基数 c.

证 (1) 由于整系数多项式全体是可数集，设其元素为 f_1，$f_2,\cdots,f_n,\cdots$，设多项式 $f_n(x)$ 的全体实根之集为 A_n，由于 n 次多项式根的个数为有限个，故 A_n 为有限集，从而代数数全体 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 为可数个有限集的并集，故 A 为可数集. 即 $\overline{\overline{A}}=a$.

(2) 设超越数全体所成之集为 B，即 $B=\mathrm{R}^1-A$，则 $A\cup B=\mathrm{R}^1$，从而 B 必为无限集，由于 A 为可数集，而任一无限集添加一个可数集其势不变，故 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{\mathrm{R}}}=c$.

注 这个事实告诉我们，超越数不仅存在，而且远比代数数多.

[1.38] 证明任一可数集的所有有限子集全体是可数集.

证 设 A 为可数集，其元素为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，以 A_n 表示由 A 中 n 个元素组成的子集的全体，F 为 A 中所有有限子集全体，则

$$F=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n,$$

其中 $A_0=\{\varnothing\}$ 为单元素集.

另设 $\quad B=\{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\mid k_i\in\mathrm{N}$ 为自然数集$\}$，

则 B 中任意元素由 n 个独立记号所决定，且每个独立记号跑遍一个可数集 N，故 B 为可数集.

现对 A_n 的每个元素 $\{a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n}\}$，令其对应于 B 中的元素 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$，则 A_n 与 B 的一个子集对等，由于 B 为可数集，所以，A_n 为至多可数集，但 A_n 为无限集，故 A_n 为可数集，从而 $F=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$ 为可数个可数集的并集，所以，F 是可数集.

[1.39] 设 A 是一个无限集，则必有 $A^*\subset A$，使 $A^*\sim A$，而 $A-A^*$ 为可数集.

证 由于 A 为无限集，则必存在一个可数子集，记为

$$D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},$$

由于 D 为无限集，故可取 D 的一个可数子集 B：

$$B=\{a_1,a_3,a_5,\cdots,a_{2n-1},\cdots\},$$

并且

$$D-B=\{a_2,a_4,a_6,\cdots,a_{2n},\cdots\}$$

仍是可数集，$A-B$ 包含集 $\{a_2,a_4,a_6,\cdots,a_{2n},\cdots\}$，且仍为无限集，令 $A^*=A-B$，则 $A^*\subset A$，且 $A-A^*=B$ 为可数集，下证 $A^*\sim A$.

事实上，由于 $A^*=A-B$ 为无限集，必存在可数子集 $P\subset A^*$，则 $A^*=(A^*-P)\cup P$，故

$$A=A^*\cup B=(A^*-P)\cup P\cup B.$$

由于 P 可数，B 可数，则 $P\cup B$ 可数，于是

$$P\sim P\cup B.$$

又 $\qquad A^*-P\sim A^*-P$

且 $P\cap(A^*-P)=\varnothing,(P\cup B)\cap(A^*-P)=\varnothing,$

故 $(A^*-P)\cup P\sim(A^*-P)\cup(P\cup B).$

即 $A^*\sim A.$

[1.40] 证明：平面上坐标为有理数的点组成的集为可数集.

证法一 设平面上坐标为有理数的点组成的集合为 $D=\{(a,b)|a,b$ 为有理数$\}$，x 轴上坐标为有理数的点为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，$y$ 轴上坐标为有理数的点为 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$，显然 A,B 都是可数集. 令

$$D_1=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),\cdots,(a_1,b_n),\cdots\}$$
$$D_2=\{(a_2,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_2,b_n),\cdots\}$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$D_n=\{(a_n,b_1),(a_n,b_2),\cdots,(a_n,b_n),\cdots\}$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

则 $D_1,D_2,\cdots,D_n,\cdots$ 都是可数集，且 $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n$. 由于可数个可数集的并集为可数集，则 $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_n$ 为可数集.

证法二 设 $D=\{P_{xy}|x,y$ 分别独立跑遍有理数集$\}$，则 D 为平面上坐标为有理数的点的全体，D 中元素依赖于两个独立记号，而每一个记号各自跑遍一个可数集，故 D 为可数集.

[1.41] 证明：

(1) P 进位有限小数全体是可数集；

(2) 循环小数全体是可数集.

证 (1) 设 A 为 P 进位有限小数全体，A_k 为小数点第 k 位后面全为零的 P 进位有限小数全体，则 $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，因为 A_k 为形如：

$$0.t_1t_2\cdots t_k \quad (t_k\neq 0)$$

的小数全体，其中 $0\leqslant t_i<P(i=1,2,\cdots,k)$，所以 A_k 为有限集，且 A_k 的元素共有

$$\underbrace{P\times P\times\cdots\times P}_{k-1\text{个}}\times(P-1)=(P-1)\cdot P^{k-1}$$

个，从而 A 至多为可数集，但 A 显然为无限集，故 A 为可数集.

(2) 设 B 为循环小数全体. B_k 为小数点第 k 位后开始循环的小数全体. 则 $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$.

对于固定的 k，设前 k 位为 $0.t_1t_2\cdots t_k$，则由于 $0\leqslant t_i<P$ $(i=1,2,\cdots,k)$，故 $0.t_1t_2\cdots t_k$ 只有有限种选择. 另外，因循环节只可能为某一段 $t_{k+1}t_{k+2}\cdots t_{k+m}$，其中 m 为某正整数. 而 $t_{k+1}t_{k+2}\cdots t_{k+m}$ 也只能有有限种选择，故 B_k 为有限集. 从而 $B=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k$ 至多为可数集. 但 B 显然是无限集，故 B 为可数集.

[1.42] 若直线上的集合 E 的任意两点间的距离大于 1，则 E 是至多可数集.

证 设 $E=\{a_\alpha\}$，则 $|a_\alpha-a_{\alpha'}|>1$，$\forall\ \alpha\neq\alpha'$，以 E 中每一个元素为中心作区间 $\left(a_\alpha-\frac{1}{3},a_\alpha+\frac{1}{3}\right)$，由于该区间长度为 $\frac{2}{3}<1$，从而得到一个直线上两两不相交的区间所成之集.

$$B=\left\{\left(a_\alpha-\frac{1}{3},a_\alpha+\frac{1}{3}\right);a_\alpha\in E\right\}.$$

令 a_α 与 $\left(a_\alpha-\frac{1}{3},a_\alpha+\frac{1}{3}\right)$ 对应，则 B 与 E 的元素间便建立了一一对应，从而 $E\sim B$，由于直线上两两不相交的开区间所成之集为至多可数集，故 B 为至多可数集，从而 E 为至多可数集.

[1.43] 设 E 为平面上的不可数集，则可找到以原点为中心的一个圆，它包含有 E 的不可数个点.

证 用 G_n 表示以原点为中心，n 为半径的圆，显然有

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap G_n),$$

如果全部 $E\cap G_n$ 都是至多可列集，那么 E 也是至多可列集，与 E 为不可数集矛盾，所以，必有一个集 $E\cap G_{n_0}$ 为不可数集，即可找到一个以原点为中心的圆 G_{n_0}，它包含有 E 的不可数个点.

[1.44] 无限集必含有无限多个互不相交的无限真子集.

证 由于无限集必含有可数子集，所以只需对可数无限集进

行证明即可. 设 A 为可数集，即

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

作 A 的子集如下：

$$A_1=\{a_n \mid n=2(2t-1),t=1,2,\cdots\}$$
$$A_2=\{a_n \mid n=2^2(2t-1),t=1,2,\cdots\}$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$A_k=\{a_n \mid n=2^k(2t-1),t=1,2,\cdots\}$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

显然 $A_k(k=1,2,\cdots)$是 A 的真子集，且诸 A_k 互不相交. 事实上，若不然，当 $k_1\neq k_2$ 时，$A_{k_1}\cap A_{k_2}\neq\varnothing$，则必有 t_1，t_2 使

$$2^{k_1}(2t_1-1)=2^{k_2}(2t_2-1) \quad (k_1\neq k_2),$$

不妨设 $k_1<k_2$，有

$$2t_1-1=2^{k_2-k_1}(2t_2-1),$$

而 $2t_1-1$ 为奇数，$2^{k_2-k_1}(2t_2-1)$为偶数，这是不可能相等的. 从而有$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$为 A 的可数个互不相交的无限真子集.

注 任一可数集都可表成可数个两两互不相交的可数子集的并.

[1.45] 设 E 是由正数所组成的非可数集，证明，存在这样的数 $a>0$，使集 $E\cap(a,+\infty)$为非可数集.

证 由于 $E\subset(0,+\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},+\infty\right)$，所以

$$E=E\cap(0,+\infty)=E\cap\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n},+\infty\right)\right]$$
$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[E\cap\left(\frac{1}{n},+\infty\right)\right],$$

由于 E 为非可数集，那么 $E\cap\left(\frac{1}{n},+\infty\right)(n=1,2,\cdots)$中至少有一个为非可数集，若不然，对一切 n，$E\cap\left(\frac{1}{n},+\infty\right)$为可数集，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[E\cap\left(\frac{1}{n},+\infty\right)\right]=E$为可数集，这与题设矛盾. 设此非可数集为

$$E\cap\left(\frac{1}{n_0},+\infty\right),$$

则存在 $a=\frac{1}{n_0}>0$，使得 $E\cap(a,+\infty)$ 为不可数集.

[1.46] 证明：递增函数的不连续点的全体为至多可数集.

证 由于递增函数的不连续点为第一类，且有跃度的不连续点，故 $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限存在，且当 x_0 为 $f(x)$ 的不连续点时有：

$$f(x_0-0)=\sup_{x<x_0}\{f(x)\},f(x_0+0)=\inf_{x>x_0}\{f(x)\}$$

但
$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0),$$

由于 $f(x)$ 递增，所以

$$f(x_0-0)<f(x_0+0),$$

于是，$f(x)$ 的每一个不连续点 x_0 对应 y 轴上一个开区间

$$(f(x_0-0),f(x_0+0)).$$

下面证明：若 $x'<x''$ 为递增函数 $f(x)$ 的两个不连续点，则有 $f(x'+0)\leqslant f(x''-0)$.

事实上，任取一点 x_1，使 $x'<x_1<x''$，于是，

$$f(x'+0)=\inf_{x>x'}\{f(x)\}\leqslant f(x_1)\leqslant\sup_{x'<x<x''}\{f(x)\}=f(x''-0)$$

从而 x' 对应于 y 轴上的开区间 $(f(x'-0),f(x'+0))$ 与 x'' 对应于 y 轴上的开区间 $(f(x''-0),f(x''+0))$ 不相交，即 $f(x)$ 不同的不连续点所对应的 y 轴上的开区间是互不相交的，由于直线上互不相交的开区间所成之集为至多可列集，所以，递增函数的不连续点的全体也为至多可列集.

[1.47] 若 $f(x)$ 是 R^1 上的实值函数，则集合

$A_1=\{x|x\in R^1,f(x)$ 在 x 处不连续，但右极限 $f(x+0)$ 存在$\}$

是可数集.

证 令 $A=\{x|x\in R^1,f(x+0)$ 存在$\}$，对每个自然数 n，作

$$E_n=\Big\{x|x\in R^1,\exists\ \delta>0,\text{当 }x',x''\in(x-\delta,x+\delta)\text{时，}$$

$$\text{有 }|f(x')-f(x'')|<\frac{1}{n}\Big\},$$

则$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$是$f(x)$的连续点集. 事实上,对$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ n$,使$\frac{1}{n}<\varepsilon$,设$\forall\ x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$,则对一切$n$,$x_0\in E_n$,从而对$\forall\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$有$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{n}<\varepsilon$,故$f(x)$在$x_0$点连续,由$x_0$的任意性,从而$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$是$f(x)$的连续点集,于是只需证明$A-E_n$是可数集即可.

任取定一个n,并设$x\in A-E_n$. 由A的定义知$\lim\limits_{x'\to x+0}f(x')=f(x+0)$存在,故$\exists\ \delta>0$,当$x'\in(x,x+\delta)$时,有

$$|f(x')-f(x+0)|<\frac{1}{2n},$$

从而当$x',x''\in(x,x+\delta)$时有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(x+0)|+|f(x'')-f(x+0)|$$
$$<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n},$$

这说明$(x,x+\delta)\subset E_n$.

但由于$x\in A-E_n$,即$x\in A$,且$x\overline{\in}E_n$,而$(x,x+\delta)\subset E_n$,故x只能是$I_x=(x,x+\delta)$的左端点且不与$A-E_n$相交,从而$A-E_n$中每一点x是某一个开区间$I_x=(x,x+\delta)$的左端点,且不与$A-E_n$相交,因此,当$x_1,x_2\in A-E_n$,且$x_1\neq x_2$时,有$I_{x_1}\cap I_{x_2}=\varnothing$,于是区间族$\{I_x|x\in A-E_n\}$是可数集,即$A-E_n$是可数集.

[1.48] 直线R^1中任何包含非空开区间的点集都具有连续势c.

证 由于$R^1\sim(0,1)$,故$\overline{\overline{(0,1)}}=c$,对开区间$(a,b)$,定义

$$f(x)=a+(b-a)x,x\in(0,1)$$

则f是$(0,1)$到(a,b)的一一映射,故

$$\overline{\overline{(a,b)}}=\overline{\overline{(0,1)}}=c.$$

设A是包含非空开区间(a,b)的点集,由$R^1\supset A\supset(a,b)$,得$\overline{\overline{R^1}}\geqslant\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{(a,b)}}$,故$\overline{\overline{A}}=c$.

[1.49] 设数轴上一切闭区间所成之集为E,则$\overline{\overline{E}}=c$.

证 设 $M=\{P_{x_1x_2}\}$，其中 x_1, x_2 各自独立地跑遍实数集，则 $\overline{\overline{M}}=c$.

特别取 $P_{x_1x_2}=[x_1, x_2]$，则 $E\subset M$，故 $\overline{\overline{E}}\leqslant c$.

另一方面，对任意给定的实数 a，取 $b\in[a, +\infty)$，作闭区间 $[a,b]$，令

$$B=\{[a,b]\mid b\in[a,+\infty), b\text{ 跑遍}[k,+\infty), k>a\},$$

则 $B\subset E$ 且 $\overline{\overline{B}}=c$，故 $\overline{\overline{E}}\geqslant\overline{\overline{B}}=c$，即 $\overline{\overline{E}}\geqslant c$.

由 $\overline{\overline{E}}\geqslant c$ 与 $\overline{\overline{E}}\leqslant c$ 得，$\overline{\overline{E}}=c$.

[1.50] 设 $\overline{\overline{A}}=c$，$B$ 至多具有势 c，则

$$\overline{\overline{A\cup B}}=c.$$

证 由于 $A\cup B=A\cup(B-A)$，且 $A\cap(B-A)=\varnothing$，又因 $\overline{\overline{A}}=c$，故 $A\sim(-\infty,0)$，而 B 至多具有势 c，又 $B-A\subset B$，故 $B-A$ 也至多具有势 c，从而 $B-A$ 与 $[0,+\infty)$ 的某个子集 D 对等，故

$$A\cup(B-A)\sim(-\infty,0)\cup D.$$

由于 R^1 中任何包含非空开区间的点集都具有势 c，所以

$$\overline{\overline{A\cup(B-A)}}=\overline{\overline{(-\infty,0)\cup D}}=c,$$

从而有

$$\overline{\overline{A\cup B}}=c.$$

[1.51] 设 $\overline{\overline{A_n}}=c\ (n=1,2,\cdots)$，且 $A_i\cap A_j=\varnothing\,(i\neq j)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 具有势 c.

证 设 $I_n=(n-1,n]\ (n=1,2,\cdots)$，$I_n$ 具有势 c，故 $A_n\sim I_n$，当 $i\neq j$ 时，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$I_i\cap I_j=\varnothing$，

故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n=(0,+\infty),$$

所以

$$\overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}}=c.$$

[1.52] 如果 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，且 $\overline{\overline{A}}=c$，则至少存在一个 A_{n_0}，使

$\overline{\overline{A}}_{n_0}=c$.

证 (反证法) 若不然,设 $\overline{\overline{A}}_n<c\ (n=1,2,\cdots)$,由于 $\overline{\overline{A}}=c$,令

$$B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mid 诸\ x_i\ 均各自跑遍实数集\},$$

故 B 中元素由可数个独立记号决定,且每一记号跑遍一个势为 c 的集,故 $\overline{\overline{B}}=c$,从而存在一一映射 $f:A\to B$,记 $f(A)=B$,即对 $\forall\ a\in A$,$\exists\ (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in B$,使 $f(a)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$.

记$f(A_n)=B_n$,则$\overline{\overline{A}}_n=\overline{\overline{B}}_n(n=1,2,\cdots)$,且有

$$f(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f(A_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=B.$$

又记 $X_n=\{(0,0,\cdots,0,x_n,0,\cdots);x_n$ 为第 n 个坐标,它可跑遍实数集$\}$,$(n=1,2,\cdots)$,则$\overline{\overline{X}}_n=c$,$\varphi_{x_n}$为 B 中点到 X_n 的投影,即对$(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in B$,$\varphi_{x_n}((x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots))=(0,0,\cdots,0,x_n,0,\cdots)\in X_n(n=1,2,\cdots)$,记 $\varphi_{x_n}(B_n)=V_{n_{x_n}}(n=1,2,\cdots)$,当 φ_{x_n}为一一映射时,$\overline{\overline{B}}_n=\overline{\overline{V}}_{n_{x_n}}$;当 φ_{x_n}为多对一映射时,$\overline{\overline{B}}_n\geqslant\overline{\overline{V}}_{n_{x_n}}$,无论如何,当$(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in B_n$ 时,总有

$$\varphi_{x_n}((x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots))=(0,0,\cdots,0,x_n,0,\cdots)\in V_{n_{x_n}}.$$

且由于$\overline{\overline{A}}_n=\overline{\overline{B}}_n<c$,显然 $V_{n_{x_n}}\subset X_n$,$\overline{\overline{V}}_{n_{x_n}}\leqslant\overline{\overline{B}}_n$. 故$\overline{\overline{V}}_{n_{x_n}}<c$,但$\overline{\overline{X}}_n=c$,所以,$V_{n_{x_n}}$为 X_n 的真子集,从而,$\exists\ x_n^*$ 使$(0,0,\cdots,0,x_n^*,0,\cdots)\overline{\in}V_{n_{x_n}}$,即对任何 $x_i(i\neq n)$有

$$(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^*,x_{n+1},\cdots)\overline{\in}B_n(n=1,2,\cdots),$$

从而有$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*,\cdots)\overline{\in}\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=B$,由 B 的结构知矛盾,从而至少存在一个 A_{n_0},使$\overline{\overline{A}}_{n_0}=c$.

注 对此题的证明容易犯这样的错误:

$\because$ $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$,且 $\overline{\overline{A}}=c$,则至少存在一个 A_{n_0},使$\overline{\overline{A}}_{n_0}=c$,若不

然，对一切 n，$\overline{\overline{A}}_n<c$，则 A_n 的势最多只有可数集的势 a，从而 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 为至多可数集，故 $\overline{\overline{A}}\leqslant a<c$，矛盾.

因为著名的康托假设（即在 a 与 c 之间没有势 μ，使 $a<\mu<c$.）还没得到证明，只是个假设，所以如此证明是不对的.

[**1.53**] 若 $A\supset B\supset C$，$A\sim C$，则 $A\sim B\sim C$.

证 由于 $A\sim C$，故存在一一映射 $f:A\to C$，而 $B\subset A$，故 $f:B\to f(B)$ 且 $f(B)\subset C$，即 B 与 C 的一个子集对等.

另一方面，$B\supset C$，当然有 C 与 B 的某个子集对等，故由伯恩斯坦定理知 $B\sim C$，从而有

$$A\sim B\sim C.$$

注 此题是伯恩斯坦定理的另一种形式，是证明集合对等的有力工具.

[**1.54**] 证明：若 $A\subset B$，且 $A\sim A\cup C$，则有 $B\sim B\cup C$.

证 由条件易得

$$B=A\cup(B-A) \tag{1}$$

$$B\cup C=[A\cup(C-B)]\cup(B-A) \tag{2}$$

由于 $A\cap(B-A)=\varnothing$，$[A\cup(C-B)]\cap(B-A)=\varnothing$，

而
$$A\subset A\cup(C-B)\subset A\cup C,$$

已知 $A\sim A\cup C$，故由伯恩斯坦定理知

$$A\sim A\cup(C-B).$$

而 $B-A\sim B-A$，由(1)，(2)得 $B\sim B\cup C$.

[**1.55**] 设 F 是[0,1]上的全体实函数所成的集合，而 M 是[0,1]的全体子集所成的集合，则 $F\sim M$.

证 分二步证明.

(i) 设 E 是全体实数组成的集合，则 $[0,1]\sim E$，从而[0,1]的全体子集所成之集 M 对等于 E 的全体子集所成之集 T.

对每一个实函数 $f\in F$，作集

$$E_f=\{f(x)\mid x\in[0,1]\},$$

则 E_f 是 E 的一个子集，从而 $E_f\in T$，所以必有 M 的一个元素与之

对应，于是 F 可以与 M 的一个子集对等.

(ii) 对[0,1]的每一个子集 $A\in M$，作 A 上的特征函数 $\chi_A(x)\in F$，则 A 与 $\chi_A(x)$ 一一对应，从而 M 可与 F 的一个子集对等.

综上，由伯恩斯坦定理有 $F\sim M$.

注 由于 $\overline{\overline{M}}=2^c$，则 $\overline{\overline{F}}=2^c$，即[0,1]上全体实函数所成之集的势为 2^c.

[1.56] 证明$[a,b]$上的连续函数全体 $C[a,b]$的势为 c.

证 对任意实数 $k\in C[a,b]$，则 $\overline{\overline{\{k\}}}=c$，而实数列全体 A 的势也为 c，所以 A 与 $C[a,b]$的子集$\{k\}$对等. 根据伯恩斯坦定理，只须证明 $C[a,b]$与 A 的一个子集对等即可.

事实上，把$[a,b]$中的有理数排成一列：

$$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$$

则任何一个连续函数 $f(x)$，由它在 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$上的值 $f(r_1)$，$f(r_2)$，$\cdots$，$f(r_n)$，$\cdots$完全决定，这是因为对于任何 $x\in[a,b]$，存在上述有理数列的子列 $r_{n_k}\to x\quad(k\to\infty)$，由 $f(x)$的连续性知：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_{n_k}),$$

因此，作 $C[a,b]$到 A 的映射

$$\varphi: f(x)\mapsto(f(r_1),f(r_2),\cdots,f(r_n),\cdots)$$

则映射是一一映射，而集

$$B=\{(f(r_1),f(r_2),\cdots,f(r_n),\cdots)\mid f\in C[a,b]\}$$

是实数列全体 A 的一个子集，故 $C[a,b]$与 B 一一对应，由伯恩斯坦定理知：$C[a,b]\sim A$，故

$$\overline{\overline{C[a,b]}}=c.$$

[1.57] 若 $f(x)$具有如下特征：对每一个 x_0 有 $\delta>0$ 与之对应，当$|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\geqslant f(x_0)$，则 $f(x)$函数值的全体为至多可数集.

证 对$\forall\ x_0\in(-\infty,+\infty)$及 $\delta>0$，可找到有理区间 $\Delta_{x_0}=(r_{x_0},R_{x_0})$，使 $x_0\in\Delta_{x_0}$，且 $\Delta_{x_0}\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$，从而由假设知，当 x

$\in \Delta_{x_0}$时，有 $f(x) \geqslant f(x_0)$，记这些有理区间的全体为

$$A=\{\Delta_{x_0} \mid x_0 \in (-\infty,+\infty)\}.$$

又设 B 为由一切有理数对 r,R 构成的区间(r,R)的全体，即

$$B=\{(r,R) \mid r,R \in Q, r<R\},$$

则 B 为可数集，且 $A \subset B$，而 $\overline{\overline{B}}=a$，从而

$$\overline{\overline{A}} \leqslant a.$$

以 F 记 $f(x)$的函数值全体的集合，不妨设当 $x_1 \neq x_2$ 时，$f(x_1) \neq f(x_2)$，相应地有 $\Delta_{x_1} \in A$，$\Delta_{x_2} \in A$，必有 $\Delta_{x_1} \neq \Delta_{x_2}$，即两区间不重合，若不然 $\Delta_{x_1}=\Delta_{x_2}$，由 $x_2 \in \Delta_{x_1}$，有 $f(x_2) \geqslant f(x_1)$，又由 $x_1 \in \Delta_{x_2}$ 有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. 即有 $f(x_1)=f(x_2)$ 与假设矛盾，从而必有 $\Delta_{x_1} \neq \Delta_{x_2}$，由此可见，$F$ 中不同的函数值对应于 A 中不同的区间，即 F 与 A 的一个子集对等，从而有

$$\overline{\overline{F}} \leqslant \overline{\overline{A}} \leqslant a,$$

即 $f(x)$的函数值全体所成之集是至多可数集.

[1.58] 若对任意有限个 x：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，$\exists M>0$，使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right| \leqslant M$$

成立，试证，能使 $f(x) \neq 0$ 的 x 的集合为至多可数集.

证 由题设条件，令

$$A_a=\{x \mid f(x)>a, a>0\},$$
$$B_b=\{x \mid f(x) \leqslant b, b>0\},$$

则 A_a 与 B_b 均为有限集. 事实上，若 A_a 为无限集，可在其中取可数个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，从而有

$$f(x_i)>a (i=1,2,\cdots), \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant na$$

故
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)=\infty,$$

这与题设矛盾. 故 A_a 为有限集，同理 B_b 为有限集. 另记

$$A=\{x \mid f(x) \neq 0\},$$

$$A^+=\{x|f(x)>0\},$$

$$A^-=\{x|f(x)<0\},$$

则
$$A=A^+\cup A^-.$$

所以只需证明 A^+ 与 A^- 都是至多可数集即可.

下证 A^+ 为至多可数集.

设 $E_1=A_1=\{x|f(x)>1\}$

$$E_m=\left\{x\left|\frac{1}{m}<f(x)\leqslant\frac{1}{m-1}\right.\right\}\quad(m=2,3,\cdots)$$

故
$$E_m=A_{\frac{1}{m}}\cap B_{\frac{1}{m-1}}\quad(m=2,3,\cdots),$$

从而
$$A^+=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

而已证 A_a,B_b 均为有限集,故对$\forall$ $m\geqslant2$,$A_{\frac{1}{m}}$,$B_{\frac{1}{m-1}}$ 皆为有限集,故 E_m 也为有限集.从而 $A^+=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 为至多可数集.

同理可证 A^- 也为至多可数集.

所以,综合上述知 $A=A^+\cup A^-$ 为至多可数集,即

$$A=\{x|f(x)\neq0\}\text{为至多可数集.}$$

[1.59] 证明$[a,b]$上右方连续且单调的函数全体的势是 c.

证 设 E 为右方连续单调函数全体所成之集,$\forall$ $f(x)\in E$,作

$$E_1=\{f(x)+d\,|\,d\text{ 为任何实数}\},$$

显然 $\overline{\overline{E}}_1=c$,而 $E_1\subset E$,所以 $\overline{\overline{E}}_1\leqslant\overline{\overline{E}}$,即 $\overline{\overline{E}}\geqslant c$.

另一方面,对$\forall$ $f(x)\in E$,对应有 $f(x)$ 在有理点上的函数值集合
$$a_f=(f(r_1),f(r_2),\cdots,f(r_n),\cdots),$$

由 f 的右连续性可知,$f(x)$ 在无理点上的值完全由 a_f 所决定,从而 a_f 完全决定 $f(x)$,即 $f(x)$ 与 a_f 是一一对应的,从而,E 与 $\{a_f|f(x)\in E\}$ 对等,而 $\{a_f|f(x)\in E\}$ 是实数列集的子集,因实数列集的势为 c,故 $\{a_f|f(x)\in E\}$ 的势$\leqslant c$,从而有 $\overline{\overline{E}}\leqslant c$.

综合上述知 $\overline{\overline{E}}=c$.

[1.60] 证明(a,b)上的凸函数在除一个至多可数集外的点

上都是可微的.

证 所谓(a,b)上的凸函数是指:$\forall\, x_1,x_2\in(a,b)$,$x_1<x_2$,都有

$$f(x)\leqslant\frac{(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)}{x_2-x_1}\quad(x_1<x<x_2),$$

即有
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

此外,对 $x<x_2'<x_2$ 有

$$\frac{f(x_2')-f(x)}{x_2'-x}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

这说明存在右导数

$$\lim_{x_2'\to x^+}\frac{f(x_2')-f(x)}{x_2'-x}=f'_+(x)<+\infty.$$

类似可证左导数 $f'_-(x)$也存在,并且有

$$-\infty<f'_-(x)\leqslant f'_+(x)<+\infty.$$

先证 $E=\{x\,|\,f'_-(x)\neq f'_+(x)\}$为可数集.

事实上,令

$$A=\{x\,|\,x\in(a,b),f'_-(x)>f'_+(x)\},$$
$$B=\{x\,|\,x\in(a,b),f'_-(x)<f'_+(x)\},$$

则 $E=A\cup B$,故只需证明 A,B 均为可数集即可.

下面以 A 为例证之,B 的情形类似可证.

对$\forall\, x_0\in A$,选有理数 r_{x_0}(设 $r_{x_0}>0$),使得

$$f'_-(x_0)>r_{x_0}>f'_+(x_0),$$

由于
$$f'_-(x_0)=\lim_{y\to x_0^-}\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}>r_{x_0}$$

及
$$f'_+(x_0)=\lim_{y\to x_0^+}\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}<r_{x_0},$$

由极限的保号性可选有理数 s_{x_0} 及 t_{x_0},$a<s_{x_0}<t_{x_0}<b$,使

$$\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}>r_{x_0}\quad(s_{x_0}<y<x_0)$$

及
$$\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}<r_{x_0}\quad(x_0<y<t_{x_0}),$$

合并两式得 $$f(y)-f(x_0)<r_{x_0}(y-x_0)$$

（其中 $y\neq x_0$，且 $s_{x_0}<y<t_{x_0}$）

令 $x\to(r_x,s_x,t_x)$，则这是 A 到 Q^3 的一个映射，而且是单射. 事实上，若 $x_1,x_2\in A$，使 $r_{x_1}=r_{x_2},s_{x_1}=s_{x_2},t_{x_1}=t_{x_2}$，则 $(s_{x_1},t_{x_1})=(s_{x_2},t_{x_2})$，且均含有 x_1 与 x_2. 于是同时有

$$f(x_2)-f(x_1)<r_{x_1}(x_2-x_1),f(x_1)-f(x_2)<r_{x_2}(x_1-x_2)$$

但 $r_{x_1}=r_{x_2}$，故此两式不可能同时成立. 这说明 A 与 Q^3 的一个子集对等. 而 Q^3 为可数集，从而 A 为可数集.

同理可证 B 也是可数集. 从而 $E=A\cup B$ 为可数集.

而在 $(a,b)-E$ 上，处处有 $f'_-(x)=f'_+(x)=f'(x)$，即 $f(x)$ 在 $(a,b)-E$ 上处处可导. 故 (a,b) 上的凸函数在除去一个至多可数点集外都是可微的.

第二章 点 集

内容提要

[定义 2.1] (1) 我们称集合

$$\mathrm{R}^n = \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n\text{个}}$$

$$= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathrm{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

为实 n 维空间,称$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为 R^n 中的一个点,简记为 x,当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 时,称之为 R^n 中的原点.

(2) 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$和 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$是 R^n 中任意两个点,定义它们的距离如下

$$\rho(x, y) \triangleq \left\{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(3) 设 M 为 R^n 中的点集,若$\exists\ K > 0, \forall\ x \in M(x = (x_1, x_2, \cdots, x_n))$有$|x_i| \leqslant K (i = 1, 2, \cdots, n)$,则称 M 为有界集.

注 1° R^1、R^2 和 R^3 就是通常的实直线、二维平面及三维空间. R^1 中两点 x 与 y 间的距离就是$|x - y|$.

2° 距离是一个关于 x 和 y 的二元函数,它具有下述基本性质:

(i) 非负性:$\rho(x, y) \geqslant 0$,当且仅当 $x = y$ 时 $\rho(x, y) = 0$;

(ii) 对称性:$\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(iii) 满足三角不等式:$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

以上三条是距离的本质,以此作为公理可建立抽象的距离空间(度量空间)的概念.

3° $\rho(x, y)$是二元连续函数,即若 $x_n \to x, y_n \to y (n \to \infty)$,则有

$\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$ $(n\to\infty)$.

4° 集 M 有界的充要条件是：$\exists\ K'>0$，使 $\forall\ x\in M$，都有 $\rho(x,0)\leqslant K'$.

[定义 2.2] 设 x_0 为 R^n 中的点，则称点集

$$\{x\,|\,x\in\mathrm{R}^n,\rho(x,x_0)<\delta\}$$

为 x_0 的 δ 邻域，记为 $N(x_0,\delta)$. 称 x_0 为该邻域的中心. δ 为该邻域的半径.

[定义 2.3] 设 $E\subseteq\mathrm{R}^n$，我们对 E 中的点作如下分类：

(1) x_0 为 E 的内点 $\overset{\triangle}{\longleftrightarrow}\exists\ \delta>0$，使 $N(x_0,\delta)\subseteq E$.

(2) x_0 为 E 的边界点 $\overset{\triangle}{\longleftrightarrow}\forall\ \delta>0,\exists\ x_1,x_2\in N(x_0,\delta)$ 使

$$x_1\in E,x_2\notin E.$$

(3) x_0 为 E 的孤立点 $\overset{\triangle}{\longleftrightarrow}\exists\ \delta>0$，使 $E\cap N(x_0,\delta)=\{x_0\}$.

(4) x_0 为 E 的聚点 $\overset{\triangle}{\longleftrightarrow}\forall\ \delta>0$，都有

$$E\cap(N(x_0,\delta)-\{x_0\})\neq\varnothing.$$

(5) E 的导集 E' 定义为：

$$E'\triangleq\{x\,|\,x\text{ 是 }E\text{ 的聚点}\}.$$

(6) E 的内域 E° 定义为：

$$E^\circ\triangleq\{x\,|\,x\text{ 是 }E\text{ 的内点}\}.$$

(7) E 的闭包 $\overline{E}$ 定义为：

$$\overline{E}\triangleq E\cup E'.$$

注 1° 若 x_0 是 E_1 的内点，且 $E_1\subseteq E_2$，则 x_0 必是 E_2 的内点(将"内点"换成"聚点"亦然).

2° 点集 E 的每一点或为孤立点，或为聚点，二者必居其一，且只居其一.

3° 内点、聚点、边界点及孤立点之间有下述关系：

(i) x 为 E 的内点 $\Longrightarrow x$ 为 E 的聚点. 反之不一定.

(ii) x 为 E 的孤立点 $\Longrightarrow x$ 为 E 的边界点. 反之不一定.

(iii) E 的孤立点不可能是 E 的内点. 反之亦然.

(iv) 一般地，E 的边界点可能是聚点. 反之亦然.

［定理 2.1］ 导集、内域、闭包具有如下性质：

(1) 若 $A\subseteq B$，则有 $A'\subseteq B'$，$A^0\subseteq B^0$，$\overline{A}\subseteq\overline{B}$.（单调性）

(2) $(A\cup B)'=A'\cup B'$， $(A\cap B)^0=A^0\cap B^0$，

$(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cup\overline{B}$.

(3) $A^0\subseteq A\subseteq\overline{A}$.

［定理 2.2］ 聚点具有的性质：

(1) x_0 是 E 的聚点$\Longleftrightarrow\forall\ \delta>0$，在 $N(x_0,\delta)$ 中恒有无穷多个点属于 E.

(2) x_0 是 E 的聚点$\Longleftrightarrow\forall\ \delta>0$，在 $N(x_0,\delta)$ 中至少含有 E 中的一个异于 x_0 的点.

(3) x_0 是 E 的聚点$\Longleftrightarrow E$ 中有互异点列$\{x_n\}$收敛于 x_0.
即 $x_0\in E'\Longleftrightarrow\exists\ \{x_n\}\subseteq E(x_i\neq x_j,i\neq j)$ 使 $\rho(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$.

(4) 波尔察诺一维尔斯特拉斯定理（Bolzano－Weierstrass）定理：

若 E 是 R^n 中的有界无穷点集，则 $E'\neq\varnothing$.（即：任一有界无穷点集至少有一聚点）.

［定义 2.4］ 设 $E\subseteq\mathrm{R}^n$.

(1) 称 E 为开集，当且仅当 $E=E^0$.

(2) 称 E 为闭集，当且仅当 $E=\overline{E}$（即 $E\supseteq E'$）.

(3) 称 E 为完备集，当且仅当 $E=E'$（或称完全集）.

(4) 称 E 为自密集，当且仅当 $E\subseteq E'$（或称致密集）.

(5) 称 E 为疏朗集，当且仅当$\forall\ \delta>0$、$x\in E$，有

$$N(x,\delta)-\overline{E}\neq\varnothing\text{（即 }E\text{ 没有内点）}.$$

注 1° 完备集就是自密闭集.

2° E 是闭集$\Longleftrightarrow E=\overline{E}\Longleftrightarrow E$ 中的任一收敛点列必收敛于 E 中的一点.

3° E 是自密集$\Longleftrightarrow E\subseteq E'\Longleftrightarrow E$ 不含孤立点.

4° E 是完备集$\Longleftrightarrow E=E'\Longleftrightarrow E$ 是不含孤立点的闭集.

［定理 2.3］ 开、闭集的运算性质：

(1) 若 F 是闭集，则 $\mathscr{C}F$ 是开集；若 G 是开集，则 $\mathscr{C}G$ 是

闭集.

(2) 任意多个开集的并集仍是开集,有限个开集的交集仍是开集;任意多个闭集的交集仍是闭集,有限多个闭集的并集仍是闭集.

(3) 若 F 为闭集,G 为开集,则 $G-F$ 为开集,$F-G$ 为闭集.

注 1° 任意多个开(闭)集的交(并)集不一定是开(闭)集.

2° 设 $F_1,F_2,\cdots,F_n,\cdots$ 是一串闭集,而

$$F=\sum_{n=1}^{\infty}F_n,$$

则称 F 为 F_σ 型集.

类似地,称 $G=\prod_{n=1}^{\infty}G_n$($G_n$ 为开集,$n=1,2,\cdots$)为 G_δ 型集.

[**定理 2.4**] 波雷尔(Borel)有限覆盖定理:

设 F 是有界闭集,$\mathscr{U}=\{U_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是一族邻域,若

$$F\subseteq\sum_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha\ (F\text{ 被 }\mathscr{U}\text{ 覆盖}).$$

则存在有限多个邻域 $U_1,U_2,\cdots,U_m$,使

$$F\subseteq\sum_{i=1}^{m}U_i$$

(即:有界闭集的任一开覆盖必有有限子覆盖).

注 1° 设 $E\subseteq\mathrm{R}^n$,$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是一族开集,若对$\forall\ x\in E$,总存在 $G_x\in\{G_\alpha\}$,使 $x\in G_x$,则称开集族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为 E 的一个开覆盖;若 E 的开覆盖$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$中有子族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda'}$($\Lambda'\subseteq\Lambda$)也覆盖 E,则称该子族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda'}$为覆盖$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的子覆盖.

2° 对一般集 $E\subseteq\mathrm{R}^n$,有林德略夫覆盖定理:设 $E\subseteq\mathrm{R}^n$,$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 E 的一个开覆盖,则存在至多可数个 G_α:$G_1,G_2,\cdots,G_n,\cdots$,使

$$E\subseteq\sum_{n=1}^{\infty}G_n.$$

由此可见,Borel 有限覆盖定理是林氏定理的特殊情形.

[**定理 2.5**] R^1 中开集的结构:任何非空开集 G 可表为至多可数个互不相交的开区间之并.即:

若 G 为开集，则∃ (a_k,b_k)，$k=1,2,\cdots$，$(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\varnothing$，$i\neq j$，$a_k,b_k\notin G$，使

$$G=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k).$$

注 1° 这些开区间 $(a_k,b_k)(k=1,2,\cdots)$ 称为 G 的构成区间.

2° 对于 R^1 中无界开集 G，我们将 $(-\infty,b)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,+\infty)$ 等也算作构成区间，结论仍然正确.

[定理 2.6] R^1 中闭集的结构：

(1) 引理：设 F 是 R^1 中非空有界闭集，则 F 中必有一最大点 x_1 和最小点 x_2，对∀ $x\in F$，有

$$x_2\leqslant x\leqslant x_1.$$

(2) 设 F 是非空有界闭集，则存在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 及至多可列个互不相交的开区间 (a_k,b_k)，$k=1,2,\cdots$，使

$$F=[\alpha,\beta]-\left(\sum_k(a_k,b_k)\right).$$

注 1° 去掉的那些开区间称为 F 的邻区间.

2° 对于 R^1 中的无界闭集，定理[2.6]仍然成立.

[定理 2.7] 设 P 是非空有界完备集，则存在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 及至多可列个互不相交的且无公共端点的开区间 (a_k,b_k)，$k=1,2,\cdots$，使

$$P=[\alpha,\beta]-\left(\sum_k(a_k,b_k)\right).$$

推论 R^1 中的非空闭集 F 可表为一完备集 P 及孤立点集(可列集) D 之并.

[定理 2.8] Cantor 集的性质：设 P 为 Cantor 集，则有

(1) P 是完备集.

(2) P 是疏朗集.

(3) P 具有连续基数 c.

(4) P 为零测集(测度概念见下章).

[定义 2.5] 设 $A\subseteq R^n$，$B\subseteq R^n$，则定义 A 与 B 的距离为

$$\rho(A,B)\triangleq\inf\{\rho(x,y)\mid x\in A,y\in B\}.$$

特别，当 A 为单点集 $\{x\}$ 时，便是点 x 到集 B 的距离：

$$\rho(x,B)=\inf\{\rho(x,y)\mid y\in B\}.$$

注 1° 对 $\forall x\in A, y\in B$，恒有

$$\rho(x,y)\geqslant\rho(A,B)\geqslant 0.$$

2° 若 $x\in B$，则 $\rho(x,B)=0$. 其逆不真.

3° 设非空闭集 A、$B\subseteq \mathbf{R}^n$，且其中至少有一个为有界闭集，则必有 $x_0\in A, y_0\in B$，使得

$$\rho(x_0,y_0)=\rho(A,B).$$

（称此为距离可达定理.）

4° 设 $E\subseteq\mathbf{R}^n, d>0$，则集合

$$U=\{x\mid x\in\mathbf{R}^n, \rho(x,E)<d\}\ \text{是开集}.$$

[**定理 2.9**] （隔离性定理）：

（1）设 F_1、F_2 为二个有界闭集，且 $F_1\cap F_2=\varnothing$，则必存在开集 G_1、G_2 使 $F_1\subseteq G_1$，$F_2\subseteq G_2$，且

$$G_1\cap G_2=\varnothing.$$

（2）当 F_1、F_2 去掉有界条件，但 F_1、F_2 是闭集，且 $F_1\cap F_2=\varnothing$，则上述结论仍成立.

问题解答

一、回答问题并说明理由

[**2.1**] 能否举出具有下列性质之一的集合：

（1）A_1 只有一个极限点，且极限点不属于 A_1；

（2）A_2 有 m 个极限点，且极限点不属于 A_2；

（3）A_3 有可列个极限点，且极限点不属于 A_3；

（4）没有边界点的平面点集；

（5）有边界点，但边界点不属于该集的平面点集？

解 可以举出如下：

（1）$A_1=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$. 显然

$$A_1' = \{0\}，但 0 \notin A_1.$$

(2) $A_2=\left\{1+\frac{1}{2},2+\frac{1}{2},\cdots,m+\frac{1}{2},1+\frac{1}{3},\cdots,m+\frac{1}{3},\cdots\right\}$

则 $A_2'=\{1,2,\cdots,m\}$，且 $1,2,\cdots,m$ 都不属于 A_2.

$$(3)\ A_3=\left\{1+\frac{1}{2};1+\frac{1}{3},2+\frac{1}{2};1+\frac{1}{4},2+\frac{1}{3},3+\frac{1}{2};\cdots\cdots\right.$$
$$\left.1+\frac{1}{n},2+\frac{1}{n-1},\cdots,(n-1)+\frac{1}{2};\cdots\cdots\right\}$$

则 $\qquad A_3' = \{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 且 $n \notin A_3(n = 1,2,\cdots)$.

(4) $\varnothing$ 及 R^2 即是.

(5) 平面上任意不等于 R^2 的非空开集. 如

$$A = \{(x,y) \in R^2 | x^2 + y^2 < 1\} 等等.$$

[2.2] 能否断定 R^1 中的孤立点集必是至多可列集，且为疏朗集?

解 可以断定. 设 A 为孤立点集.

(i) 证 A 是可列集. 记 B 为 R^1 中以有理数为端点的开区间全体所成的集. 则 B 为可列集. 若 $x\in A$，则存在 x 的一个以有理数为端点的邻域(α_x,β_x)，使

$$((\alpha_x,\beta_x) - \{x\}) \cap A = \varnothing.$$

对每个 $x\in A$，都作出这样的一个邻域，由于每个邻域中只含一个 A 中的点，故 A 中两个不同点 x 与 $y(x\neq y)$所对应的邻域(α_x,β_x)与(α_y,β_y)也不相同. 记

$$D = \{(\alpha_x,\beta_x) | x \in A\}.$$

则 A 与 D 对等. 但 D 为可列集 B 的一个子集，即 D 是至多可列的. 故 A 为至多可列点集.

(ii) 对任取的开区间(α,β)，如果(α,β)不含 A 的点，则 A 当然是疏朗集. 如果(α,β)含有 A 的点 x_0，即 $\alpha<x_0<\beta$，由于 x_0 为孤立点，必有正数 $\delta>0$，使得$(x_0,x_0+\delta)\subsetneq(\alpha,\beta)$，且

$$(x_0,x_0 + \delta) \cap A = \varnothing$$
$$(x_0 - \delta,x_0) \cap A = \varnothing$$

故 A 是疏朗的.

[2.3] 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 R^1 上的有限个集，下式

$$(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)' = A_1' + A_2' + \cdots + A_n'.$$

是否成立？

解 成立. 证明如下：

设 $x_0 \overline{\in} A_1' + A_2' + \cdots + A_n'$，则 $\forall\, i(i=1,2,\cdots,n)$，有 $x_0 \overline{\in} A_i'$，即 x_0 不是诸 A_i 的聚点，从而存在 x_0 的邻域 (α_i, β_i)，使

$$[(\alpha_i, \beta_i) - \{x_0\}] \cap A_i = \varnothing (i = 1,2,\cdots,n).$$

现取 $\alpha = \max\{\alpha_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$，$\beta = \min\{\beta_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$，则 $\alpha < x_0 < \beta$，且 $[(\alpha,\beta) - \{x_0\}] \cap A_i = \varnothing (i=1,2,\cdots,n)$.

$$\therefore\ [(\alpha,\beta) - \{x_0\}] \cap (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = \varnothing.$$

这说明 x_0 不是 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 的聚点，即

$$x_0 \overline{\in} (A_1 + A_2 + \cdots + A_n)'.$$

由 x_0 的任意性可知，凡不是集 $A_1' + A_2' + \cdots + A_n'$ 的点必不是集 $(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)'$ 的点. 换言之，凡属于 $(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)'$ 的点必属于 $A_1' + A_2' + \cdots + A_n'$，即

$$(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)' \subseteq (A_1' + A_2' + \cdots + A_n').$$

反之，由于

$$A_i \subseteq (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

由导集的单调性可知

$$A_i' \subseteq (A_1 + A_2 + \cdots + A_n)' \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

$$\therefore\quad A_1' + A_2' + \cdots + A_n' \subseteq (A_1 + A_2 + \cdots + A_n)'.$$

综合上述两方面，结论得证.

[2.4] (1) 任意多个开集的交集一定是开集吗？

(2) 任意多个闭集的并集一定是闭集吗？

解 都不一定. 举例如下：

(1) 设 $G_n = \left(-\dfrac{1}{n}, 1 + \dfrac{1}{n}\right). (n=1,2,\cdots)$，则 G_n 为开集. 但是

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} G_n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [0,1].$$

显然 G 是闭集.

(2) 设 $F_n=\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$ $(n=2,3,\cdots)$，则 F_n 为闭集，但是

$$F=\sum_{n=2}^{\infty}F_n=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=(0,1).$$

显然是开集.

[2.5] 试举出 R^1 中具有下列各种可能情况的点集：

(1) 没有极限点；

(2) 集本身同时就是它自己的极限点全体；

(3) 极限点一部分在集中，另一部分不在集中，甚至极限点比集本身的点还要多.

解 (1) 空集 $\varnothing$ 没有极限点，一切有限点集无极限点，又集 $\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 也无极限点.

(2) $[a,b]$ $(a<b)$ 的极限点全体就是 $[a,b]$.

(3) 以 Q 表示 $[0,1]$ 中的有理数全体，则 Q 的极限点全体就是 $[0,1]$，可见 Q 的极限点比本身的点还要多.

[2.6] (1) 当闭集 $F\subseteq[a,b]$ 时，$\mathscr{C}_{[a,b]}F=[a,b]-F$ 是否为开集？是否为闭集？

(2) 当闭集 $F\subseteq(a,b)$ 时，$\mathscr{C}_{(a,b)}F=(a,b)-F$ 是否为开集？是否为闭集？

(3) 将(1)(2)中的闭集 F 换为开集 G 呢？

解 (1) 闭集 $F\subseteq[a,b]$ 时，$\mathscr{C}_{[a,b]}F$ 不一定是开集也不一定是闭集. 如

取 $F=[0,1]\subseteq[0,2]$，但 $\mathscr{C}_{[0,2]}F=(1,2]$.

(2) 若闭集 $F\subseteq(a,b)$，则 $\mathscr{C}_{(a,b)}F$ 必是开集. 事实上，当 F 为闭集，$\mathscr{C}F$ 为开集，而 (a,b) 是开集，则 $\mathscr{C}_{(a,b)}F=(a,b)-F=(a,b)\cap\mathscr{C}F$ 为开集.

(3) 若开集 $G\subseteq[a,b]$，则 $\mathscr{C}_{[a,b]}G$ 一定是闭集. 因 G 为开集可推知 $\mathscr{C}G$ 为闭集，于是

$$\mathscr{C}_{[a,b]}G=[a,b]-G=[a,b]\cap\mathscr{C}G\text{ 为闭集.}$$

(4) 由 $\mathscr{C}_{(0,2)}(0,1)=[1,2)$ 可知，当开集 $G\subseteq(a,b)$ 时，$\mathscr{C}_{(a,b)}G$

不一定为开集，也不一定为闭集.

[2.7] 疏朗集的余集是否一定为稠密集？

解 是. 事实上，若(α,β)是任意一个开区间，由于 A 是疏朗集，不含任何区间，即(α,β)中总有不是 A 的点，故

$$(\alpha,\beta)\cap \mathscr{C}A\neq\varnothing.$$

(α,β)中含有 $\mathscr{C}A$ 中的点.

由(α,β)的任意性知，$\mathscr{C}A$ 是稠密集.

[2.8] 设 F 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界闭集，G 是开集且 $F\subseteq G$，问能否找到一个正数 δ，使当$|x|<\delta$ 时，有

$$F+\{x\}=\{y+x\mid y\in F\}\subseteq G?$$

解 答案是肯定的. 证明如下：

对$\forall\ y\in F$，因 $F\subseteq G$，则 $y\in G$，而 G 为开集，所以 y 是 G 的内点，即$\exists\ \delta_y>0$，使邻域

$$N(y,\delta_y)\subseteq G.\ 记\ U_y=N(y,\delta_y/2).$$

从而$\{U_y\mid y\in F\}$组成有界闭集 F 的一个开覆盖，由波雷尔(Borel)有限覆盖定理可知，$\exists\ \{y_1,y_2,\cdots,y_m\}\subset F$

使得
$$F\subseteq\sum_{k=1}^{m}U_{y_k},$$

于是每一个 $y\in F$ 至少属于某个 U_{y_k}，且对$\forall\ z\in\mathscr{C}G$

有 $|y-z|\geqslant|z-y_k|-|y_k-y|>\delta_{y_k}-\delta_{y_k}/2=\delta_{y_k}/2.$

现取 $\delta=\dfrac{1}{2}\min\{\delta_{y_1},\delta_{y_2},\cdots,\delta_{y_m}\}$，则当$|x|<\delta$ 时，对$\forall\ y\in F$，有

$$y+x\in G,\ 即\ F+\{x\}\subseteq G.$$

[2.9] $\mathbf{R}^1$ 中的闭集与完备集有何关系？

解 任一非空闭集 F 可表为一完备集 P 及孤立点集 D(是可列集)之并. 证明如下：

若 F 为 $\mathbf{R}^1$ 中的有界闭集，则由有界闭集的构造(定理 2.6(2))可知，有闭区间$[\alpha,\beta]$，使

$$F=[\alpha,\beta]-\sum_{k}(a_k,b_k).$$

其中$(a_k,b_k)\subseteq[\alpha,\beta](k=1,2,\cdots)$，且$(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j)=\varnothing(i\neq j)$.

于是有下列三种情形：

(i) 当某$a_k=\alpha$或某$b_k=\beta$时，α或β便是F的孤立点.

(ii) 当F的某两个相邻的余区间(a_i,b_i)与(a_j,b_j)有一个公共端点，如$a_j=b_i=x_0$，则x_0显然是F的孤立点.

(iii) 当F的两个相邻的余区间(a_i,b_i)与(a_j,b_j)有关系$b_i<a_j$时，$[b_i,a_j]$是F的一个子闭区间.

除此以外，再没有其它情况，所以F中的点被分为两类：一是孤立点，其全体记为D，由(i)、(ii)可知，D是至多可列集；一是情况(iii)所述的全体子闭区间(至多可列个且互不相交)之并所成的集P，显然P是完备集.

若F为无界闭集，则只要考虑到α可能为$-\infty$，而β可能为$+\infty$，上述证明仍然适用于此.

二、点集的各种性质

[2.10] 设$A\subseteq B$，则$A'\subseteq B'$、$A^\circ\subseteq B^\circ$、$\overline{A}\subseteq\overline{B}$.

证 (i) 证明$A'\subseteq B'$：

$\forall x\in A'$，由聚点定义知，在x的任意邻域$N(x,\delta)$中必有异于x的点$y\in A$，而由$A\subseteq B$，所以$y\in B$，故x亦是B的聚点，即$x\in B'$，亦即$A'\subseteq B'$.

(ii) 证明$A^\circ\subseteq B^\circ$：

$\forall x\in A^\circ$，由内点定义知，$\exists\ \delta>0$，$N(x,\delta)\subseteq A$，但$A\subseteq B$，所以$N(x,\delta)\subseteq B$. 即x是B的内点，也就是$x\in B^\circ$. 故$A^\circ\subseteq B^\circ$.

(iii) 证明$\overline{A}\subseteq\overline{B}$：

因$A\subseteq B$，由(1)知$A'\subseteq B'$. 于是有

$$\overline{A}=A\cup A'\subseteq B\cup B'=\overline{B}.$$

[2.11] 证明下列结论：

(1) 对于$x_0\in\mathbf{R}^n$，$\delta>0$，邻域$N(x_0,\delta)$必是开集；

(2) 若$E\subseteq\mathbf{R}^n$，则E°是开集，E'和$\overline{E}$均为闭集.

证 (1) 设$x\in N(x_0,\delta)$，则必有$\delta^*>0$，使

$$N(x,\delta^*)\subseteq N(x_0,\delta)$$

即 x 为 $N(x_0,\delta)$ 的内点，如图 2—1 所示.

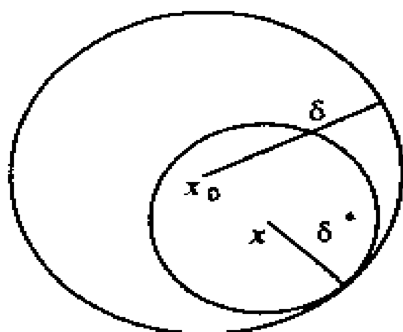


图 2—1

事实上，由于 $x\in N(x_0,\delta)$，则 $\rho(x,x_0)<\delta$，取 δ^*，使

$$0<\delta^*<\delta-\rho(x,x_0),$$

由于 $\forall\ x^*\in N(x,\delta^*)$，有

$$\rho(x^*,x)<\delta^*,$$

而 $\rho(x^*,x_0)\leqslant\rho(x^*,x)+\rho(x,x_0)$

$$<\delta^*+\rho(x,x_0)<\delta,$$

$\therefore\quad x^*\in N(x_0,\delta)$. 由 $x^*\in N(x,\delta^*)$ 的任意性知

$$N(x,\delta^*)\subseteq N(x_0,\delta).$$

故 $N(x_0,\delta)$ 是开集.

(2) 设 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 为任意点集. 首先证明 E^0 是开集. 若 $E^0=\varnothing$，则结论显然；若 $E^0\neq\varnothing$，则 $\forall\ x\in E^0$，要证 x 是 E^0 的内点，由 $x\in E^0$ 知，x 是 E 的内点，所以 $\exists\ \varepsilon>0$，使

$$N(x,\varepsilon)\subseteq E.$$

对 $\forall\ y\in N(x,\varepsilon)$，$\exists\ \delta>0$（只须 $\delta<\varepsilon-\rho(x,y)$），使

$$N(y,\delta)\subset N(x,\varepsilon)\subseteq E.$$

$\therefore\quad y\in E^0$.

由 $y\in N(x,\varepsilon)$ 的任意性知 $N(x,\varepsilon)\subseteq E^0$，即 x 为 E^0 的内点.

故 E^0 为开集.

其次证 E' 为闭集. 不妨设 $(E')'\neq\varnothing$（当 $(E')'=\varnothing$ 时 E' 显然是闭集），只要证得 $(E')'\subseteq E'$（即 $\forall\ x\in(E')'$，证得 $x\in E'$）即可.

由于 x 为 E' 的聚点，所以在 x 的任意邻域中含有 E' 的无穷多个点，从而对 $\forall\ \varepsilon>0$，有

$$E'\cap N(x,\varepsilon)\ \text{为无限集}.$$

故 $\exists\ x_1\in E'\cap N(x,\varepsilon)$.

由于 $x_1\in N(x,\varepsilon)$，因此 $\exists\ \delta>0$，使

$$N(x_1,\delta)\subseteq N(x,\varepsilon).$$

再由 $x_1\in E'$ 可知$\exists$ $\delta_1>0$,使 $E\cap N(x_1,\delta_1)$为无限集.

但 $$N(x_1,\delta_1)\subseteq N(x_1,\delta)\subseteq N(x,\varepsilon).$$

所以,$E\cap N(x,\varepsilon)\supseteq E\cap N(x_1,\delta_1)$为无限集.

故 x 为 E 的聚点,即 $x\in E'$.

所以,$(E')'\subseteq E'$,E' 为闭集.

最后我们证明 $\overline{E}$ 为闭集.由于 $\overline{E}=E\cup E'$,而 E' 是闭集,即有 $(E')'\subseteq E'$,从而有

$$(\overline{E})'=(E\cup E')'=E'\cup(E')'\subseteq E'\cup E'=E' \subseteq E\cup E'=\overline{E}.$$

故 $\overline{E}$ 为闭集.

[2.12] 设 $\mathrm{R}^n=\mathrm{R}^2$ 是 xOy 平面.

(1) $E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$,求 E_1',E°_1,$\overline{E_1}$.

(2) $E_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},x\in\mathrm{R}\right\}$,求 E_2',E_2°.

解 (1) $E_1'=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$;

$E_1^\circ=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}=E_1$;

$\overline{E_1}=E_1\cup E_1'=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

(2) $E_2'=\left\{(x,y)\mid y=\sin\dfrac{1}{x},x\neq 0\right\}\cup\{(x,y)\mid |y|\leqslant 1,x=0\}$;

$E_2^\circ=\varnothing$.

[2.13] 设 E 是$[0,1]$上的全体有理点,在 R^1 与 R^2 中分别看 E 时,E、E',E°,$\overline{E}$ 各是由哪些点构成的.

解 在 R^1 中,$E=Q_{[0,1]}$,$E'=\overline{E}=[0,1]$,$E^\circ=\varnothing$.

在 R^2 中,$E=\{(x,y)\mid y=0,x\in Q_{[0,1]}\}$.

$$E'=\overline{E}=\{(x,y)\mid y=0,x\in[0,1]\},E^\circ=\varnothing.$$

[2.14] 设 G_1、G_2 是 R^1 中的开集,且 $G_1\subseteq G_2$,则 G_1 的每个构成区间必含在 G_2 的某个构成区间之中.

证 设$\forall x\in(\alpha_1,\beta_1)$，其中$(\alpha_1,\beta_1)$为$G_1$的任意一个构成区间，则由$G_1\subseteq G_2$得$x\in(\alpha_1,\beta_1)\subseteq G_1\subseteq G_2$，即

$$x\in G_2.$$

故存在G_2的某个构成区间(α_2,β_2)：$x\in(\alpha_2,\beta_2)$.

下证$(\alpha_1,\beta_1)\subseteq(\alpha_2,\beta_2)\subseteq G_2$. 若不然，便有

(i) $x<\beta_2<\beta_1$ 或(ii) $\alpha_1<\alpha_2<x$

就情形(i)而言，可得

$$\beta_2\in(\alpha_1,\beta_1)\subseteq G_2.$$

这与(α_2,β_2)是G_2的构成区间相矛盾. 由(ii)也可以导出同样的矛盾. 故

$$\beta_1\leqslant\beta_2,\ \alpha_2\leqslant\alpha_1$$

即$(\alpha_1,\beta_1)\subseteq(\alpha_2,\beta_2)$. 证毕.

[2.15] 若点集A的导集A'是非空的至多可列集，则A必为可列集.

证 记B为A的孤立点全体，则B为至多可数集. 由于A'的每一点是A的聚点，这些聚点可能属于A也可能不属于A，所以

$$A=B\cup(A\cap A').\qquad(*)$$

因B至多可数，而$A\cap A'\subseteq A'$，且A'至多可数，所以$A\cap A'$也为至多可数集. 因此结合$(*)$式知A为至多可数集.

但由条件$A'\neq\varnothing$知集A至少有一极限点x_0，那么x_0的任意邻域中含有A的无限多个点，所以A为无限集.

故 A为可数集.

[2.16] 设集M对于A有$M'\cap A\subseteq M$，则称M闭于A(M相对于集A为闭集). 证明：M包含于A且闭于A的充要条件是存在闭集F：$M=A\cap F$.

证 必要性 设$M\subseteq A$，且$M'\cap A\subseteq M$，取

$$F=\overline{M}=M\cup M',$$

则F为闭集，且

$$A\cap F=A\cap(M\cup M')=(A\cap M)\cup(A\cap M')=M.$$

即 $M=A\cap F$.

充分性　设存在闭集 F，使 $M=A\cap F$，则显然有 $M\subseteq A$（因 $M=A\cap F$）. 而

$$M'=A'\cap F'\subseteq A'\cap F\subseteq F（因\ F\ 闭集）$$

所以　$M'\cap A\subseteq F\cap A=M$.

故　M 闭于 A.

[2.17]　设 E 为康托集的余集的构成区间的中点所成之集，求 E'.

解　(i) 设康托集为 P_0，其余集为 G_0，

$$G_0=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\cup\cdots$$

考察[0,1]中的点的三进制表示法，设

$$a_i=\begin{cases}0,\\2;\end{cases}\qquad b_i=\begin{cases}0,\\1,\\2.\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots)$$

由康托集的构造知，当 $y\in P_0$ 时，y 的小数点后任一位数字都不是 1，因而可设

$$y=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

当 $x\in G_0$ 时，可设

$$x=0.a_1a_2\cdots a_nb_{n+1}b_{n+2}\cdots,$$

特别，对于 G_0 的构成区间的右端点 $y_右$，有

$$y_右=0.a_1a_2\cdots a_n2000\cdots,$$

对于 G_0 的构成区间的左端点 $y_左$，有

$$y_左=0.a_1a_2\cdots a_n0222\cdots,$$

由此可见，$E\subsetneq G_0$，且当 $z\in E$ 时，有

$$z=\frac{1}{2}(y_右+y_左)=0.a_1a_2\cdots a_n111\cdots$$

(ii) 下证康托集 P_0 中的点都是 E 的极限点.

对$\forall\ y\in P_0$，由于 $y=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，取 $z_k\in E$，

则
$$z_k=0.a_1a_2\cdots a_k111\cdots\in E.$$

由于 y 与 z_k 的小数点后前 k 位小数相同，从而

$$|z_k - y| \leqslant \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+2}} + \cdots = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3^{k+1}} < \frac{1}{3^k}.$$

故$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N>0$,当 $k>N$ 时有$\frac{1}{3^k}<\varepsilon$. 即

$$|z_k - y| < \varepsilon.$$

这就证得 $z_k \longrightarrow y(k\to\infty)$. 即 $y\in E'$.

(iii) 下证$\forall\ x\in G_0$,有 $x\notin E'$. 事实上,若 $x\in E$,则 x 只能是 G_0 的构成区间的中点,即

$$x = 0.a_1a_2\cdots a_n111\cdots.$$

由康托集的构造知,对$\forall\ z\in E(z\neq x)$,都有

$$|z - x| \geqslant 1/3^n.$$

所以 $x\notin E'$.

若 $x\notin E$,且 $x\in G_0$,则

$$x = 0.a_1a_2\cdots a_n11\cdots1a_mb_{m+1}\cdots \quad (m > n+1).$$

于是$\forall\ z\in E$,有

$$|z - x| > 1/3^m.$$

$\therefore$ $$x\notin E'.$$

故 G_0 中的点不属于 E'.

综上所述,我们有:P_0 中的点都是 E 的极限点,不是 P_0 的点都不是 E 的极限点. 从而

$$E' = P_0.$$

[**2.18**] 设 $A\subseteq \mathbf{R}^1$,则 $x\in \overline{A}$ 的充要条件是:包含点 x 的任意邻域(α,β),有$(\alpha,\beta)\cap A\neq\varnothing$.

证 必要性 设 $x\in\overline{A}$,当 $x\in A$ 时,对于 x 的任意邻域(α,β),有$(\alpha,\beta)\cap A\supseteq\{x\}$,所以

$$(\alpha,\beta)\cap A \neq \varnothing.$$

当 $x\notin A$ 时,由于 $x\in\overline{A}=A+A'$,所以必有 $x\in A'$,即 x 为 A 的极限点.

于是由极限点的定义知,对 x 的任意邻域(α,β),总有 A 中异于 x 的点含于(α,β),即

$$((\alpha,\beta)-\{x\})\cap A\neq\varnothing.$$

$\therefore$ $$(\alpha,\beta)\cap A\neq\varnothing.$$

充分性　设对 x_0 的任意邻域(α,β)，都有

$$(\alpha,\beta)\cap A\neq\varnothing.$$

若 $x_0\in A$，则 $x_0\in A\cup A'=\overline{A}$；若 $x_0\notin A$，则由

$$((\alpha,\beta)-\{x_0\})\cap A=(\alpha,\beta)\cap A\neq\varnothing.$$

（(α,β)为 x_0 的任意邻域）可知，x_0 为 A 的极限点，即 $x_0\in A'$.

故　$x_0\in A'\cup A=\overline{A}$.　证毕

[2.19]　证明用十进位小数表示[0,1]中的数时，其中用不着数字 6 的一切数成为完全集.

证　用十进位小数可将[0,1]中任一数表示成 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，其中 $0\leqslant a_n\leqslant 9,n=1,2,\cdots$.

把[0,1]十等分，去掉第七个等分开区间

$$(6/10,7/10),$$

于是表示式中 $a_1=6$ 的小数就全部去掉了（注意规定 6/10 表示为 0.599…，而不表示为 0.600…）.

然后把余下的九个区间的每一个都进行十等分，去掉各自的第七个等分开区间，于是表示式中 a_2 为 6 的小数全部去掉了（对分点的小数表示仍规定以 9 为循环节，同上）.

继续这一过程，去掉的这些开区间有可数无限多个，且彼此互不相交，又无公共端点，与[0,1]也没有公共端点.

故用十进位小数表示[0,1]中的数时，其中用不着数字 6 的一切数成为完全集（与康托集的构造相同）.

[2.20]　试证一切包含 E 的闭集之交集恰为 $\overline{E}$.

证　设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$为一切包含 E 的闭集所成之集，

则 $$E\subseteq F_\alpha,$$

记 $$F=\bigcap_{\alpha}F_\alpha.$$

下证 $F=\overline{E}$：

一方面，$\overline{E}$ 显然是一个含 E 的闭集，即

$$\overline{E} \supseteq F.$$

另一方面，对$\forall\ F_\alpha$(F_α为闭集，且$E\subseteq F_\alpha$)，由$E\subseteq F_\alpha$可得$E' \subseteq F_\alpha'$，但$F_\alpha' \subseteq F_\alpha$($F_\alpha$闭集)，

$\therefore$ $$E' \subseteq F'_\alpha \subseteq F_\alpha.$$

即 $$\overline{E} = E \cup E' \subseteq F_\alpha \cup F_\alpha = F_\alpha.$$

由F_α的任意性知$\overline{E}\subseteq F$.

故 $F=\overline{E}$.

[2.21] 如果闭集A不含任何开区间，则A必是疏朗集.

证 由于闭集A不含任何开区间，则对任一开区间(α,β)，有

$$(\alpha,\beta) \cap \mathscr{C}A \neq \varnothing,$$

即(α,β)至少有一点属于$\mathscr{C}A$.

但由于A是闭集，所以$A=\overline{A}$. 于是上式变为

$$(\alpha,\beta) - \overline{A} \neq \varnothing.$$

对$\forall\ x\in A,\delta>0$，邻域$N(x,\delta)$也是开区间，

$\therefore$ $$N(x,\delta) - \overline{A} \neq \varnothing.$$

故由疏朗集的定义知，A是疏朗集.

[2.22] 设$\{I_\alpha\}$为R^1上一族开区间，且$\prod_\alpha I_\alpha\neq\varnothing$，则$\sum_\alpha I_\alpha$必是一个开区间.

证 令$G=\sum_\alpha I_\alpha$，则$G\neq\varnothing$，且G为开集.

如果G不是一个开区间，则G至少有两个构成区间(a_1,b_1)，(a_2,b_2). 由G的意义可知，存在开区间I_{α_1}、I_{α_2}，使

$$I_{\alpha_1} \cap (a_1,b_1) \neq \varnothing,\ I_{\alpha_2} \cap (a_2,b_2) \neq \varnothing.$$

由于$I_{\alpha_i}\subseteq G(i=1,2)$，所以由构成区间的意义可得

$$I_{\alpha_1} \subseteq (a_1,b_1),\ I_{\alpha_2} \subseteq (a_2,b_2).$$

但$(a_1,b_1)\cap(a_2,b_2)=\varnothing$，从而$I_{\alpha_1}\cap I_{\alpha_2}=\varnothing$. 于是更有

$$\prod_\alpha I_\alpha = \varnothing.$$

这与题设相矛盾，故G必为一个开区间.

[2.23] 证明：(a,b)不可能表示为可数个两两不相交的闭集

之并.

证 用反证法.

设$(a,b)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n$. 其中$\{F_n\}$为两两不交的闭集列.

(i) 由于 F_1 是有界闭集,所以

$$a_1=\sup F_1\in F_1.$$

而 $F_1\subseteq(a,b)$,故 $a_1<b$,可取 b_1,使 $a_1<b_1<b$,于是$[a_1,b_1]\subset(a,b)$.

(ii) 把$\{F_n\}$中第一个与$[a_1,b_1]$相交的闭集记为 F_{n_2},显然 $n_2>1$,且$[a_1,b_1]\cap F_{n_2}$为非空有界闭集. 所以 $b_2=\inf([a_1,b_1]\cap F_{n_2})\in F_{n_2}$. 由于$\{F_n\}$两两不交而 $a_1\in F_1$,$b_2\in F_{n_2}$,所以 $b_2\neq a_1$,且 $b_2>a_1$(若 $b_2<a_1$,则$[b_2,a_1]\subset F_{n_2}$,$a_1\in F_{n_2}$,矛盾).

取$[a_1,b_2]$的中点为 a_2,得$[a_2,b_2]$满足

$$[a_2,b_2]\subseteq[a_1,b_2]\subseteq[a_1,b_1],$$

且 $$b_2-a_2\leqslant(b_2-a_1)/2\leqslant(b_1-a_1)/2,$$

而且 $$[a_2,b_2]\cap F_k=\varnothing\quad(k=1,2,\cdots,n_2).$$

(iii) 同理,记$\{F_n\}$中第一个与$[a_2,b_2]$相交的闭集为 F_{n_3},显然 $n_3>n_2$. 因$[a_2,b_2]\cap F_{n_3}$为非空有界闭集,所以

$$a_3=\sup([a_2,b_2]\cap F_{n_3})\in F_{n_3}.$$

由于 $b_2\in F_{n_2}$,而$\{F_n\}$两两不相交,故 $a_3<b_2$. 取 a_3 与 b_2 的中点为 b_3,则$[a_3,b_3]$满足

$$[a_3,b_3]\subseteq[a_3,b_2]\subseteq[a_2,b_2],$$

且 $$b_3-a_3\leqslant(b_2-a_3)/2\leqslant\frac{b_2-a_2}{2}\leqslant\frac{b_1-a_1}{2^2},$$

而且 $$[a_3,b_3]\cap F_k=\varnothing\quad(k=1,2,\cdots,n_3).$$

(iv) 重复运用上述方法,可得闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$

满足 $$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq\cdots\supseteq[a_i,b_i]\supseteq\cdots$$

且 $$b_i-a_i\leqslant(b_1-a_1)/2^{i-1},$$

$$[a_i,b_i]\cap F_k=\varnothing\quad(k=1,2,\cdots,n_i).$$

根据闭区间套定理可知,存在唯一点

$$x_0 \in [a_i, b_i] \subset (a, b) \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

由 $x_0 \in (a,b)$ 知 $\{F_n\}$ 中应有某一个闭集 F_{n_0}，使

$$x_0 \in F_{n_0}.$$

于是，根据 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成过程，必有某闭区间 $[a_{i_0}, b_{i_0}] \cap F_{n_0} = \varnothing$.

因此，当 $x_0 \in F_{n_0}$，必有 $x_0 \notin [a_{i_0}, b_{i_0}]$. 这与 x_0 属于任一 $[a_n, b_n]$ 相矛盾，故 (a,b) 不可能表示为可数个两两不相交的闭集之并.

[2.24] 证明数轴上一切无理点所成的集 I 为 G_δ 型集.

证 设数轴上的有理数集为 Q，则 $Q \cup I = R^1$. 由于 Q 可数，可将 Q 的元素排列为

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$$

记 $G_k = R^1 - \{r_k\} \quad (k = 1, 2, \cdots)$. 显然 $\{r_k\}$ 是闭集（单元素集为闭集），所以 G_k 为开集.

下证 $I = \prod\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ 即可.

事实上，对 $\forall\ x \in I \subseteq R^1$，即 x 为无理数，有

$$x \notin Q，即\ x \notin \{r_k\} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

于是

$$x \in G_k \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

$\therefore \quad x \in \prod\limits_{k=1}^{\infty} G_k$，亦即 $I \subseteq \prod\limits_{k=1}^{\infty} G_k$.

反之，对 $\forall\ x \in \prod\limits_{k=1}^{\infty} G_k$，有

$$x \in G_k = R^1 - \{r_k\} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

$\therefore \quad x \notin \{r_k\}\ (k = 1, 2, \cdots)$. 这说明 x 不是有理点，即 $x \in I$.

因此

$$\prod_{k=1}^{\infty} G_k \subseteq I.$$

故 $I = \prod\limits_{k=1}^{\infty} G_k$. 而每个 G_k 为开集，从而证得 I 为 G_δ 型集.

[2.25] 证明：可数个 G_δ 型集的交集仍为 G_δ 型集.

证 设 A_i 是 G_δ 型集，即

$$A_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{i_k},\text{其中 } A_{i_k} \text{ 是开集.}$$

如果有 $E=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，则

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{i_k}\right) = \bigcap_{k,i=1}^{\infty} A_{i_k}.$$

即 E 可表为可数个开集的交集，故 E 仍为 G_δ 型集.

［**2.26**］（康托闭集套定理）：若 $\{F_k\}$ 是 R^n 中的非空有界闭集列，且 $F_k \supseteq F_{k+1}(k=1,2,\cdots)$，则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing.$$

即至少存在一点 $x\in F_k(k=1,2,3,\cdots)$，或 $x\in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$.

证　若在 $\{F_k\}$ 中有无穷多个相同的集合，则由单调性可知，存在自然数 k_0，当 $k\geqslant k_0$ 时，$F_k=F_{k_0}$. 此时

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = F_{k_0} \neq \varnothing.$$

以下不妨设 F_{k+1} 是 F_k 的真子集. 这时由于 $F_k-F_{k+1}\neq\varnothing$，可选取

$$x_k \in F_k - F_{k+1} \quad (k = 1,2,\cdots),$$

则 $\{x_k\}$ 是 R^n 中的有界互异点列. 根据波尔察诺-维尔斯特拉斯定理可知，$\exists\ x\in \mathrm{R}^n$ 及 $\{x_{k_i}\}\subseteq\{x_k\}$

使得
$$x_{k_i} \longrightarrow x \quad (k_i \longrightarrow \infty).$$

于是，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $k_i>N$ 时，有

$$\rho(x_{k_i},x) < \varepsilon. \tag{1}$$

此时必有

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k.$$

若不然，则 $\exists\ F_{k_0}$，使 $x\notin F_{k_0}$. 由于 $F_k\supset F_{k+1}(k=1,2,\cdots)$，从而当 $k>k_0$ 时，$x\notin F_k(k=k_0+1,k_0+2,\cdots)$.

因诸 F_k 为闭集，所以当 $k>\max\{N,k_0\}$ 时，存在 $\varepsilon_k>0$，使 $\rho(x,F_k)>\varepsilon_k$.

对$\forall\ x_{k_i}\in F_{k_i}$时，也有 $\rho(x,x_{k_i})>\varepsilon_k(k_i>\max\{N,k_0\})$，这与(1)式相矛盾.

故 $x\in\prod\limits_{k=1}^{\infty}F_k$，即 $\prod\limits_{k=1}^{\infty}F_k\neq\varnothing$.

[2.27] 已给某一平面点集 E，已知此集的所有相异的两点间的距离的下确界是正的，则 E 没有极限点.

证 依题设有

$d=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in E,y\in E,x\neq y\}>0,E\subseteq\mathrm{R}^2$.

下证 R^2 中任一点 $a=(a_1,a_2)$都不是 E 的极限点. 为此，我们证明在邻域 $N(a,d/2)$中至多只有 E 的一个点. 用反证法：若有两点 $x,y\in E$：

$$x,y\in N(a,d/2),$$

则有 $\quad\rho(x,y)\leqslant\rho(x,a)+\rho(a,y)<d/2+d/2=d.$

即 $$\rho(x,y)<d.$$

这与 $d=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in E,y\in E,x\neq y\}$相矛盾.

故集 E 的任意点 a 的邻域 $N(a,d/2)$中至多含有 E 的一个点，即集 E 没有极限点.

[2.28] 试证下面三条是等价的：

(1) $x_0\in E'$；

(2) 存在点列$\{x_n\}\subset E,x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$使 $x_n\to x_0$；

(3) x_0 的任一邻域 $N(x_0)$(不一定以 x_0 为中心)中必含有 E 中的无限个点.

证 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 $x_0\in E'$，则由聚点定义知，$\forall\ \delta>0$，都有 $E\cap(N(x_0,\delta)-\{x_0\})\neq\varnothing$. 即 $N(x_0,\delta)$中至少含一个 E 中的异于 x_0 的点. 于是我们可以按如下步骤作出点列$\{x_n\}$：

先在 $N(x_0,1)$中取一点 $x_1\in E$. 若 x_n 已经取好，则令 $\delta_{n+1}=\min\left\{\dfrac{1}{n},|x_0-x_n|\right\}$，在邻域 $N(x_0,\delta_{n+1})$中可取 $x_{n+1}\in E(n=1,2,$

$\cdots$), $x_{n+1} \neq x_0$.

由于 $$|x_n - x_0| < 1/n \ (n = 1,2,\cdots),$$

这样所得的点列$\{x_n\}$显然以 x_0 为极限. 即

$$x_n \longrightarrow x_0 (n \longrightarrow \infty), (x_n \neq x_0)$$

(2)$\Longrightarrow$(3) 设有点列$\{x_n\} \subset E$, $x_n \neq x_0 (n=1,2,\cdots)$,使

$$x_n \longrightarrow x_0 (n \longrightarrow \infty) (x_n \text{不一定彼此不同}),$$

这时$\{x_n\}$中必有无限多项彼此不同. 因若$\{x_n\}$只由有限多个点组成,必有一个点 y 在其中重复出现无限多次,然而 $x_n \longrightarrow x_0$,所以应该 $y = x_0$,这与 $x_n \neq x_0$ 相矛盾. 因此可以在$\{x_n\}$中取出由互不相同的点组成的子列$\{x_{n_k}\}$.

设 $N(x_0)$是 x_0 的任意邻域,由 $x_{n_k} \longrightarrow x_0 (k \longrightarrow \infty)$,所以有自然数 k_0,当 $k > k_0$ 时,$x_{n_k} \in N(x_0)$. 这就是说 $N(x_0)$中有 E 的无限多个点$\{x_{n_{k_0}+1}, x_{n_{k_0}+2}, \cdots\}$.

(3) $\Longrightarrow$(1) 设 x_0 的邻域中含 E 的无限多个点,于是在以 x_0 为中心的邻域 $N(x_0,\delta)$中当然就有异于 x_0 的属于 E 的点,即

$$E \cap (N(x_0,\delta) - \{x_0\}) \neq \varnothing.$$

故 $x_0 \in E'$.

[2.29] 点集 A 为闭集的充要条件是:A 中任何一个收敛点列必收敛于 A 中的一点.

证 必要性 设 A 为闭集,即 $A' \subseteq A$. 取任一收敛点列$\{x_n\} \subseteq A$, $x_n \longrightarrow x_0 (n \longrightarrow \infty)$. 下证 $x_0 \in A$.

事实上,若 $x_n = x_0$,则 $x_0 \in A$;

若对$\forall n$,有 $x_n \neq x_0$,且 $x_n \longrightarrow x_0 (n \longrightarrow \infty)$,则可知 x_0 是 A 的极限点,于是

$$x_0 \in A' \subseteq A, \text{即 } x_0 \in A.$$

充分性 设 A 中任何一个收敛点列必收敛于 A 中一点. 对$\forall x_0 \in A'$,有$\{x_n\} \subseteq A$, $x_n \longrightarrow x_0$,但由假设 $x_0 \in A$,所以

$A' \subseteq A$,即 A 为闭集.

[2.30] 若 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空点集,则 G 为开集的充要条件是:对$\forall x \in G$, $\exists \delta > 0$,使 $N(x,\delta) \subseteq G$.

证　必要性　若 G 为开集，则 $\mathscr{C}G$ 为闭集. 于是 $(\mathscr{C}G)' \subseteq \mathscr{C}G$. 设 $x\in G$，则 $x\notin\mathscr{C}G$，更有

$$x \notin (\mathscr{C}G)',$$

即 x 不是 $\mathscr{C}G$ 的极限点. 故 $\exists\ \delta>0$，使

$$N(x,\delta) \cap \mathscr{C}G = \varnothing,$$

从而

$$N(x,\delta) \subseteq G.$$

充分性　若 $\forall\ x\in G$，$\exists\ \delta>0$，使 $N(x,\delta)\subseteq G$. 则 $N(x,\delta)\cap\mathscr{C}G=\varnothing$，即 x 不是 $\mathscr{C}G$ 的极限点. 这说明 x 不属于 $\mathscr{C}G$，就一定不是 $\mathscr{C}G$ 的极限点. 换言之，$\mathscr{C}G$ 的极限点必属于 $\mathscr{C}G$. 也就是说

$(\mathscr{C}G)'\subseteq\mathscr{C}G$，即 $\mathscr{C}G$ 是闭集.

故　G 为开集.

[2.31]　设 f 是有界闭集 X 上的一一对应连续映射，E 是 X 的任意子集，则有

$$f(E') = (f(E))'.$$

证　由于 $E\subseteq X$，所以 $E'\subseteq X'$，而 X 为闭集，即有 $X'\subseteq X$，因此有

$$E' \subseteq X.$$

今设 $\forall\ y\in f(E')$，则有 y 的唯一原象 $x\in E'$，且 $y=f(x)$. 由 $x\in E'$ 知，x 为 E 的极限点. 据极限点的定义，有 E 中的点列 $\{x_n\}$，使

$$x_n \to x(x_n \neq x).$$

由 f 是 X 的一一对应的连续映象知

$f(x_n) \in f(E)$ 且 $f(x_n) \to f(x) = y, f(x_n) \neq f(x).$

这说明 $f(x)$ 是 $f(E)$ 的极限点，即 $y\in(f(E))'$.

$$\therefore \quad f(E') \subseteq (f(E))'. \tag{1}$$

反之，若 $y\in(f(E))'$，则 y 是 $f(E)$ 的极限点，从而有 $f(E)$ 的点列 $\{y_n\}$，使

$$y_n \to y(n \to \infty), y_n \neq y.$$

注意到 $f(E)\subseteq f(X)$，而 $f(X)$ 为闭集，所以有

$$(f(E))' \subseteq (f(X))' \subseteq f(X).$$

$\therefore \quad y\in f(X)$，而 $y_n\in f(E)\subseteq f(X)$ 且 $y_n\to y$.

由 f 是 X 上的一一对应的连续映象可知，y_n 的原象 $x_n\in E$ 且收敛于 y 的原象 $x\in X$，即

$$x_n \to x(n \to \infty),x_n \neq x.$$

这说明 x 是 E 的极限点，即 $x\in E'$.

从而 $\qquad y=f(x)\in f(E')$.

故 $\qquad (f(E))'\subseteq f(E')$. $\qquad$ (2)

综合(1)、(2)两式可知

$$f(E') = (f(E))'.$$

[2. 32] （林德略夫(Lindelof)定理）

设点集 $E\subseteq R^1$，M 是一族开邻域，它完全覆盖 E，则在 M 中存在至多可数个开邻域完全盖住 E.

证 设 $k_1,k_2,\cdots,k_n,\cdots$ 为有理数全体，$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$ 为正有理数全体. 由题设知，对 $\forall\ x_0\in E$，有开邻域 $N(x_0,\delta_{x_0})\subseteq M$，使 $x_0\in N(x_0,\delta_{x_0})$. 并且可取充分小的 $\varepsilon>0$，使

$$N(x_0,\varepsilon) \subseteq N(x_0,\delta_{x_0}). \tag{1}$$

再由有理数集的稠密性，可取 $k_n\in N(x_0,\varepsilon)$，

使 $$\rho(x_0,k_n) < \varepsilon/2,$$

进一步可选取一正有理数 $r_m>0$，使

$$\rho(x_0,k_n) < r_m < \varepsilon/2.$$

这说明 $x_0\in N(k_n,r_m)$. 下面证明

$$x_0 \in N(k_n,r_m) \subseteq N(x_0,\delta_{x_0}). \tag{2}$$

事实上，对 $\forall\ x' \in N(k_n,r_m)$，有

$$\rho(x',x_0) \leqslant \rho(x',k_n) + \rho(k_n,x_0) < r_m + \varepsilon/2$$

$$< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$$\therefore \qquad x' \in N(x_0,\varepsilon).$$

由 $x' \in N(k_n,r_m)$的任意性知

$$N(k_n,r_m) \subseteq N(x_0,\varepsilon),$$

再由(1)即得(2)式.

(2)式说明对 E 中任意的点，恒可找到以有理点为中心，以正有理数为半径的邻域盖住该点. 而一切以有理点为中心，以正有理数为半径的邻域所成的集是可数集，因此

$$\{N(k_n,r_m) \mid \forall\ x\in E,\exists\ n,m: x\in N(k_n,r_m)\}$$

是至多可数集. 且

$$E\subseteq \sum_{n,m} N(k_n,r_m).$$

故在 M 中可选取至多可数个邻域(就是 M 中形如 $N(k_n,r_m)$ 的那些邻域)完全盖住 E.

注 波雷尔有限覆盖定理是林德略夫定理的(当 E 为有界闭集时)特例.

[2.33] 用康托闭区间定理证明波尔查诺-维尔斯特拉斯定理:任一有界无限点集 E 至少有一个极限点.

证 由于 E 有界，所以有闭区间$[a,b]$包含 E. 设 $c=(a+b)/2$ 则在$[a,c]$、$[c,b]$中至少有一个区间含 E 的无限多个点(否则 E 将是有限集)，将该区间记为$[a_1,b_1]$(若$[a,c]$,$[c,b]$都含 E 的无限多点，则任取其一为$[a_1,b_1]$).

然后，令 $c_1=(a_1+b_1)/2$. 同理，在$[a_1,c_1]$,$[c_1,b_1]$中至少有一个区间含 E 的无穷多个点，记这个含 E 的无限多个点的区间为$[a_2,b_2]$,…

如此继续下去，得到一列闭区间$\{[a_n,b_n]\}$,

$$[a,b]\supseteq[a_1,b_1]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$$

且具有如下性质:

(i) 每个$[a_n,b_n]$中含有 E 的无限多个点;

(ii) $b_n-a_n=(b-a)/2^n\to 0\quad(n\to\infty)$.

所以$[a,b]$,$[a_1,b_1]$,…,$[a_n,b_n]$,…构成一个闭区间套. 由康托闭区间套定理可知，必有一点 x_0:

$$x_0\in[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)，即\ a_n\leqslant x_0\leqslant b_n.$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$，得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

下证 x_0 就是 E 的一个极限点. 事实上, 取包含 x_0 的任意小邻域 (α,β). 因为对 $\forall\ n$, 有

$$a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n \quad 且 \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

故当 n 充分大时, 必有

$$[a_n, b_n] \subseteq (\alpha,\beta).$$

而每个 $[a_n, b_n]$ 中含有 E 中无限多个点, 因此 (α,β) 中含 E 的无限多个点. 由 (α,β) 的任意性知 x_0 是 E 的一个极限点.

[2.34] 用波雷尔有限覆盖定理而不用康托闭区间套定理, 证明波尔查诺-维尔斯特拉斯定理: 任一有界无限集至少有一个极限点.

证 (反证法) 先将有限覆盖定理叙述如下: 设 E 为任一有界闭集, 则对任一完全覆盖 E 的开邻域族 $\mathscr{U}$, 总存在有限个开邻域 $U_1, U_2, \cdots, U_m$, 它们完全覆盖 E.

现设 E 为有界无限集, 若 $E' = \varnothing$, 即 E 没有任何极限点, 则 $E' = \varnothing \subseteq E$. 所以 E 是闭集.

另一方面, 由于 E 的所有点都不是 E 的极限点, 所以 E 是孤立点集. 从而对 $\forall\ x \in E$, $\exists\ \delta_x > 0$, 使 $N(x,\delta_x) \cap E = \{x\}$ (即 $N(x,\delta_x)$ 仅盖住 E 中的一个点 x). 所有这样的邻域形成一族开邻域

$$\mathscr{U} = \{N(x,\delta_x) \mid N(x,\delta_x) \cap E = \{x\}\}.$$

且
$$E \subseteq \bigcup_x N(x,\delta_x) \ (\mathscr{U} \text{ 完全盖住 } E).$$

故由波雷尔有限覆盖定理可知, 存在有限个邻域 $N(x_1,\delta_{x_1})$, $N(x_2,\delta_{x_2}), \cdots, N(x_m,\delta_{x_m})$, 使

$$E \subseteq \sum_{i=1}^{m} N(x_i,\delta_{x_i}).$$

于是
$$E = E \cap \sum_{i=1}^{m} N(x_i,\delta_{x_i}) = \sum_{i=1}^{m} E \cap N(x_i,\delta_{x_i}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}.$$

即 E 是有限点集, 与 E 为无限集矛盾.

这说明 $E' = \varnothing$ 不成立, 即应有 $E' \neq \varnothing$, 亦即有界无限点集 E

至少有一个极限点.

[2.35] 证明,无理数全体不能表示为可数个闭集的并.

证 (i)先证 R^1 不能表示为可数个疏朗集的并.

(用反证法)设 $R^1=\sum_{n=1}^{\infty}P_n$,其中诸 P_n 为疏朗集. 由于 P_1 为疏朗集,在任意给定的闭区间 $[a,b]$ $(a<b)$ 中必存在闭区间 $[a_1,b_1]$, $b_1-a_1<(b-a)/2$,且

$$[a_1,b_1]\cap P_1=\varnothing.$$

又因 P_2 也是疏朗集,必存在闭区间 $[a_2,b_2]\subseteq[a_1,b_1]$

使 $\qquad b_2-a_2<(b_1-a_1)/2 \quad$ 且 $[a_2,b_2]\cap P_2=\varnothing.$

依此类推下去,得到一闭区间列,满足

$$[a,b]\supseteq[a_1,b_1]\supseteq\cdots\supseteq[a_n,b_n]\supseteq\cdots$$

$$b_n-a_n<(b-a)/2^n\to 0 \quad (n\to\infty).$$

且 $$[a_n,b_n]\cap P_k=\varnothing \quad (k=1,2,\cdots,n). \qquad (*)$$

由康托闭区间套定理,存在唯一点

$$x_0\in\prod_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\subseteq R^1.$$

由(*)知 x_0 不属于任何一个 P_n. 从而

$$x_0\notin\sum_{n=1}^{\infty}P_n=R^1,\text{矛盾}.$$

这说明 $R^1\neq\sum_{n=1}^{\infty}P_n$.

即 R^1 不能表为可数个疏朗集之并.

(ii) 证明本题结论(用反证法).

记无理数全体为 I. 若

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}F_n,\ F_n\text{ 为闭集},$$

因 I 是无理点集,所以 $F_n(n=1,2,\cdots)$ 只含无理点而不含有理点. 于是 F_n 不含任何区间,即 F_n 为疏朗集. 而已知有理数集 Q 亦是疏朗集,故

$$\mathbf{R}^1 = \mathbf{Q} \cup I = \mathbf{Q} \cup \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n \right).$$

这样一来，$\mathbf{R}^1$ 就表示为可数个疏朗集之并. 与(i)的结论相矛盾. 故 I 不能表示为可数个闭集之并.

[2.36] 设 $E \subseteq \mathbf{R}^n$，$b>0$，且 $U=\{x \mid \rho(x,E)<b\}$，则：(1) U 是开集. (2) $E \subseteq U$.

证 先证(2). 因 $\forall\ x \in E$：$\rho(x,E)=0<b$，所以有 $x \in U$. 即 $E \subseteq U$.

再证(1). 任取 $x_0 \in E$，有

$$\rho(x_0,E) = \inf\{\rho(x_0,y) \mid y \in E\}.$$

由下确界性质可知，$\exists\ y^* \in E$，使 $\rho(x_0,y^*)<b$. 于是取 $\delta=b-\rho(x_0,y^*)>0$，作邻域 $N(x_0,\delta)$.

现证明 $N(x_0,\delta) \subseteq U$. 事实上，$\forall\ x \in N(x_0,\delta)$，有 $\rho(x,x_0)<\delta$. 而

$$\begin{aligned}\rho(x,E) &= \inf\{\rho(x,y); y \in E\}. \\ &\leqslant \rho(x,y^*) \leqslant \rho(x,x_0)+\rho(x_0,y^*) \\ &< \delta+\rho(x_0,y^*)=b,\end{aligned}$$

$\therefore\quad x \in U$，即 $N(x_0,\delta) \subseteq U$.

故 U 中任一点 x_0 均为 U 的内点. 即 U 为开集.

[2.37] (推广的隔离性定理)设 F_1、F_2 为 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集，且 $F_1 \cap F_2=\varnothing$. 试证存在开集 G_1、G_2，使

(1) $G_1 \cap G_2=\varnothing$，(2) $G_1 \supseteq F_1$、$G_2 \supseteq F_2$.

证 由于 $F_1 \cap F_2=\varnothing$ 而 F_1、F_2 为闭集，则

$\forall\ x_0 \in F_1$，$\exists\ y_1 \in F_2$，使 $\rho(x_0,y_1)=\rho(x_0,F_2)>0$，

$\forall\ y_0 \in F_2$，$\exists\ x_1 \in F_1$，使 $\rho(y_0,x_1)=\rho(y_0,F_1)>0$.

取 $r(x_0)=\dfrac{1}{2}\rho(x_0,F_2)$，作邻域 $N(x_0,r(x_0))$，取 $r(y_0)=\dfrac{1}{2}\rho(y_0,F_1)$，作邻域 $N(y_0,r(y_0))$，并令

$$G_1 = \sum_{x_0 \in F_1} N(x_0,r(x_0)),\quad G_2 = \sum_{y_0 \in F_2} N(y_0,r(y_0)).$$

显然 $G_i(i=1,2)$都是开集，且 $G_i \supseteq F_i(i=1,2)$. 下证 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

若不然，则有点 $z \in G_1 \cap G_2$，即 $z \in G_i(i=1,2)$. 由 G_1 的构作可知，$\exists\ x'_0 \in F_1, y'_0 \in F_2$，使得

$$z \in N(x'_0, r(x'_0)) \text{ 且 } z \in N(y'_0, r(y'_0)).$$

不妨设 $r(x'_0) \geqslant r(y'_0)$，则有

$$\begin{aligned}\rho(x'_0, F_2) &\leqslant \rho(x'_0, y'_0) \leqslant \rho(x'_0, z) + \rho(z, y'_0) \\ &< r(x'_0) + r(y'_0) \leqslant 2r(x'_0) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}\rho(x'_0, F_2) = \rho(x'_0, F_2).\end{aligned}$$

即 $\rho(x'_0, F_2) < \rho(x'_0, F_2)$，矛盾.

故 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$，即 G_1、G_2 为所求开集.

[2.38] 设 $x \in \mathrm{R}^n$，$A \subseteq \mathrm{R}^n$，则 $x \in \overline{A}$ 的充要条件是：

$$\rho(x, A) = 0.$$

证 必要性 设 $x \in \overline{A} = A \cup A'$. 若 $x \in A$，则显然有 $\rho(x, A) = 0$；若 $x \notin A$，则必有 $x \in A'$，于是存在点列 $\{x_n\} \subseteq A$，使 $x_n \to x$ $(n \to \infty)$，但 $\forall\ n$，有

$$\begin{aligned}0 \leqslant \rho(x, A) &= \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\} \\ &\leqslant \rho(x, x_n).\end{aligned}$$

而 $\rho(x, x_n) \to 0$（即 $x_n \to x$）. 故

$$\rho(x, A) = 0.$$

充分性 若 $\rho(x, A) = 0$，则对 $\forall\ \varepsilon > 0$，有

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in A\} = 0 < \varepsilon.$$

由下确界定义可知，$\exists\ y \in A$，使 $\rho(x, y) < \varepsilon$. 即 $y \in N(x, \varepsilon)$. 这就证得 $\forall\ \varepsilon > 0$，$A \cap N(x, \varepsilon) \neq \varnothing$. 于是，或者 $x \in A$，这时 $x \in \overline{A}$；或者 $x \notin A$，这时必有 $x \in A'$，亦有 $x \in \overline{A}$.

[2.39] 若 x、$y \in \mathrm{R}^n$，$A \subseteq \mathrm{R}^n$，则

$$\rho(x, A) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, A).$$

证 由于 $\rho(y, A) = \inf\{\rho(y, z) \mid z \in A\}$，由下确界定义知，对 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ z \in A$，使

$$\rho(y, z) < \rho(y, A) + \varepsilon.$$

于是 $\rho(x,A)=\inf\{\rho(x,z)\mid z\in A\}$

$$\leqslant\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$$

$$<\rho(x,y)+\rho(y,A)+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知

$$\rho(x,A)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,A).$$

[2.40] 证明 $\rho(A,B)=\rho(\overline{A},\overline{B})$ $(A、B\subseteq\mathrm{R}^n)$.

证 由于 $\{\rho(x,y)\mid x\in A,y\in B\}\subseteq\{\rho(x,y)\mid x\in\overline{A},y\in\overline{B}\}$.

所以有 $\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$

$$\geqslant\inf\{\rho(x,y)\mid x\in\overline{A},y\in\overline{B}\}=\rho(\overline{A},\overline{B}).$$

即
$$\rho(A,B)\geqslant\rho(\overline{A},\overline{B}) \tag{1}$$

另一方面,由

$$\rho(\overline{A},\overline{B})=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in\overline{A},y\in\overline{B}\}.$$

及下确界定义,对$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \overline{x}\in\overline{A},\overline{y}\in\overline{B}$,使

$$\rho(\overline{x},\overline{y})<\rho(\overline{A},\overline{B})+\varepsilon/3.$$

而由 $\overline{x}\in\overline{A}$ 知,$\exists\ x\in A$,使 $\rho(\overline{x},x)<\varepsilon/3$,由 $\overline{y}\in\overline{B}$ 知,$\exists\ y\in B$,使 $\rho(\overline{y},y)<\varepsilon/3$. 所以有

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

$$\leqslant\rho(x,y)\leqslant\rho(x,\overline{x})+\rho(\overline{x},\overline{y})+\rho(\overline{y},y)$$

$$<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\rho(\overline{A},\overline{B})+\varepsilon/3$$

$$=\rho(\overline{A},\overline{B})+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知

$$\rho(A,B)\leqslant\rho(\overline{A},\overline{B}). \tag{2}$$

综合(1)、(2)两式可知

$$\rho(A,B)=\rho(\overline{A},\overline{B}).$$

[2.41] 直线上开集全体所成的集具有连续统的势 c.

证 设 E 为 R^1 上以有理数为端点的开区间的全体,则 E 为可数集. 记 $R(E)$ 为 E 的一切子集所成之集,由于可数集的一切子集所成之集,其势为 c,故 $R(E)$ 具有连续势 c.

而每个开区间 (a,b) 可表示为一列有理开区间之并. 事实上,只要取两个有理数列 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$,

使 $$a < \cdots < \alpha_2 < \alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < b$$

且 $$\alpha_n \to a,\ \beta_n \to b \quad (n \to \infty).$$

即知有 $$(a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n).$$

记 R^1 上开集全体为 G，下面要证 $\overline{\overline{G}} = c$.

由于每个开区间 $(0, x)$ $(0 < x < +\infty)$ 都是开集，且 $\{(0,x); 0<x<+\infty\} \subseteq G$，所以

$$\overline{\overline{G}} \geqslant \{\overline{\overline{(0,x) | 0 < x < +\infty}}\} = c.$$

另一方面，对每个开集 G，由于

$G = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$，每个 (α_n, β_n) 为有理开区间. 作对应 φ:

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n) \to \varphi(G) = (\alpha_n, \beta_n) \in R(E) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

则由于 G 表示成有理区间之并的方法并不唯一. 所以对应 φ 不是一一对应. 因此

$$\overline{\overline{G}} \leqslant \overline{\overline{\varphi(G)}} \leqslant \overline{\overline{R(E)}} = c.$$

综合上述两方面，便得 $\overline{\overline{G}} = c$.

[**2.42**] 设 A 是 R^1 中的非空闭集，试证如果 A 是疏朗完备集，那么 A 的任何两个余区间至少夹着一个余区间.

证 如图 2－2 所示，设 (α_1, β_1)、(α_2, β_2) 为 A 的两个余区间（由于 A 为疏朗完备集，所以 A 至少有两个余区间存在），不妨设 $\beta_1 \leqslant \alpha_2$. 由于 A 为完备集，没有孤立点，所以 $\beta_1 = \alpha_2$ 不可能成立，即有 $\beta_1 < \alpha_2$. 因 A 为疏朗集，故 A 不含任意小的开区间，从而在开区

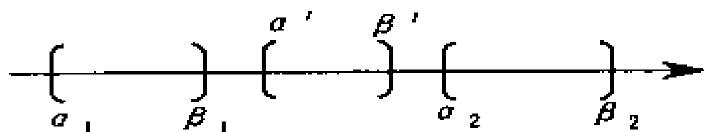


图 2－2

间(β_1,α_2)中，存在开区间$(\alpha',\beta')\subseteq(\beta_1,\alpha_2)$，$\alpha'>\beta_1$，$\beta'<\alpha_2$，使

$$(\alpha',\beta')\cap A=\varnothing.$$

于是，(i) 若$\alpha'\in A$，$\beta'\in A$，则(α',β')即为一个夹在(α_1,β_1)与(α_2,β_2)之间的A的余区间. 得证.

(ii) 若α'，β'中至少有一个属于A，令

$$\alpha^*=\inf_{(\alpha,\beta')\cap A=\varnothing}\{\alpha\},\ \beta^*=\sup_{(\alpha',\beta)\cap A=\varnothing}\{\beta\}.$$

则显然$\alpha^*<\beta^*$，且$\alpha^*>\beta_1$、$\beta^*<\alpha_2$. 因此(α^*,β^*)为夹在(α_1,β_1)、(α_2,β_2)间的一个开区间.

下证(α^*,β^*)为A的一个余区间. 事实上，由α^*、β^*的定义可知，对$\forall\ x\in(\alpha^*,\beta^*)$，有

$$x\notin A.$$

另外我们有$\alpha^*\in A$，若不然，则$\alpha^*\in\mathscr{C}A$，由于A为闭集，所以$\mathscr{C}A$为开集，因此α^*是$\mathscr{C}A$的内点，故$\exists\ (\bar{\alpha},\bar{\beta})$，使$\alpha^*\in(\bar{\alpha},\bar{\beta})$ ($(\bar{\alpha},\bar{\beta})$是$\alpha$的一个邻域，其中$(\bar{\alpha},\bar{\beta})\subseteq\mathscr{C}A$). 即$(\bar{\alpha},\bar{\beta})\cap A=\varnothing$.

由α^*的定义

$$\alpha^*=\inf_{(\alpha,\beta')\cap A=\varnothing}\{\alpha\}$$

可知$\alpha^*<\bar{\beta}$，$(\bar{\beta},\beta')\cap A=\varnothing$且$[\bar{\beta},\beta')\cap A=\varnothing$.

从而
$$[(\bar{\alpha},\bar{\beta})\cup[\bar{\beta},\beta')]\cap A=\varnothing.$$

即
$$(\bar{\alpha},\beta')\cap A=\varnothing.$$

但由设知$\alpha^*\in(\bar{\alpha},\bar{\beta})$，从而更有$\alpha^*\in(\bar{\alpha},\beta')$，这与$\alpha^*$为下确界相矛盾. 故必有$\alpha^*\in A$.

同理可证$\beta^*\in A$. 即(α^*,β^*)为A的余区间.

[2.43] 试将点集[0,1]表示为c(连续基数)个无共同点的完备集之并.

证 本题可借助著名的皮亚诺曲线得到解答.

假定按照希尔伯特的方法(参见陈建功《实函数论》第四章 4，或《分析中的反例》第十章例 6)已经得到一个从[0,1]到正方形[0,1]×[0,1]上的连续映射：

$$f(t)=\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}\qquad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

现对$\forall\ \xi\in[0,1]$，令 $E_\xi=\{t\mid\varphi(t)=\xi\}$，则 E_ξ 非空，且

$$[0,1]=\bigcup_{0\leqslant\xi\leqslant1}E_\xi.$$

下面只须证明 E_ξ 是无共同点的完备集.

(i) 当 $\xi\neq\xi'$ 时，有 $E_\xi\cap E_{\xi'}=\varnothing$.

设有 $t_0\in E_\xi\cap E_{\xi'}$，则 $\varphi(t_0)=\xi,\varphi(t_0)=\xi'$. 从而得 $\xi=\xi'$，与假设矛盾.

(ii) E_ξ 为闭集. 依定义

$$E_\xi=\{t\mid\varphi(t)=\xi\}.$$

这里 $\varphi(t)$为连续函数，所以 E_ξ 为闭集.

(iii) E_ξ 为自密集. 只需证，对$\forall\ t_0\in E_\xi$，有

$$t_0\in(E_\xi)'.$$

事实上，$\forall\ t_0\in E_\xi$，设在映射 f 之下，t_n 的象是 P_0，则由于 f 是连续映射，故存在一个递减的闭区间套$\{T_n\}$以 t_0 为公共点，相应地得到一个递减的闭正方形套$\{Q_n\}$以 P_0 为公共点.

今在每一个正方形 Q_n 中选取一点 P_n，使得

$$P_n\in f(E_\xi),P_n\neq P_0,P_n\neq P_m(n\neq m).$$

那么$\{P_n\}$是互不相同的点列，且收敛于 P_0，于是在相应的 T_n 中可求得 t_n 满足 $t_n\in E_\xi$，使 t_n 是 P_n 的原象. 因此 t_n 收敛于 t_0，从而 $t_0\in(E_\xi)'$（即 t_0 是 E_ξ 的极限点）.

由 $t_0\in E_\xi$ 的任意性可得 $E_\xi\subseteq(E_\xi)'$，即 E_ξ 为自密集.

综合(ii)、(iii)可知 E_ξ 是自密闭集，即 E_ξ 是完备集. 再由(i)知$\{E_\xi\mid\xi\in[0,1]\}$是 c 个无公共点的完备集，且$[0,1]$是它们之并.

三、与函数有关的集合

[2.44] 设 $f(x)$是 R^1 上的实函数，

(1) $f(x)$把开集映为开集，问 f 是否连续？

(2) 连续映射是否一定把开集映为开集？

解 (1) 不一定. 如在每个区间$[n,n+1](n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$上作康托三分集 P_n，且令 $G_n=[n,n+1]-P_n$，

$$P=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}P_n,\ G=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}G_n.$$

则 G 为一个开集. 又设 G 的构成区间集为

$$\{(a_k,b_k),k=1,2,\cdots\}.$$

现在 R^1 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left[\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{b_k-x}{b_k-a_k}\right)\right], & x\in(a_k,b_k),k=1,2,\cdots\\ 0, & x\in P\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 R^1 上映开集为开集，但不连续. 事实上，若开区间 (α,β) 含于某个构成区间 (a_k,b_k) 内，则 $f(x)$ 就映 (α,β) 为开区间

$$\left(\operatorname{tg}\left[\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{b_k-\alpha}{b_k-a_k}\right)\right],\operatorname{tg}\left[\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{b_k-\beta}{b_k-a_k}\right)\right]\right);$$

若开区间 (α,β) 中含有 P 中的点，则 $f(x)$ 就映 (α,β) 为 R^1. 然而 P 中的每个点都是 $f(x)$ 的不连续点.

(2) 不一定. 例如，$f(x)=x^2$ 在 R^1 上连续，但映开集 $(-1,1)$ 为 $[0,1)$，非开非闭.

[2.45] 证明，有界闭集 F 上的连续函数 $f(x)$ 必有界.

证 (反证法)若 $f(x)$ 在 F 上无界，则对任意自然数 $n(n=1,2,\cdots)$，$\exists\ x_n\in F$，使

$$|f(x_n)|\geqslant n.$$

由于 F 为闭集，所以 $\{x_n\}$ 为有界点列. 由维尔斯特拉斯定理可知，存在子列 $x_{n_k}\to x_0\in F'\subseteq F$. 由 f 在 F 上连续知 $f(x_{n_k})\to f(x_0)$ 有限 $(k\to\infty)$，但由 x_n 的作法又可得

$$f(x_{n_k})\to+\infty\ (n_k\to\infty).$$

这一矛盾说明 $f(x)$ 在 F 上有界.

[2.46] 设 $f(x)$ 是 $E=R^1$ 上的实值连续函数，则对任意常数 a，有 $E[f(x)>a]$、$E[f(x)<a]$ 为开集. (其中 $E[f(x)>a]=\{x\in E\mid f(x)>a\}$，$E[f(x)<a]=\{x\in E\mid f(x)<a\}$)

证 若 $E[f(x)>a]=\varnothing$，则当然为开集. 不妨设

$$E[f(x)>a]\neq\varnothing.$$

对 $\forall\ x_0\in E[f(x)>a]$，有 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，且 $f(x_0)>a$. 因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

根据连续函数的保号性知，∃ x_0 的一个邻域 $N(x_0,\delta)$，使对 $\forall\ x\in N(x_0,\delta)$，恒有

$$f(x)>a\text{，即 } x\in E[f(x)>a].$$

由 $x\in N(x_0,\delta)$的任意性知，$N(x_0,\delta)\subseteq E[f(x)>a]$.

即 x_0 为 $E[f(x)>a]$的内点.

再由 x_0 的任意性可知，$E[f(x)>a]$为开集.

同理可证，$E[f(x)<a]$亦为开集.

[2.47] 设 $f(x)$ 为 R^1 上的连续函数，则对 $\forall\ a\in R^1$，$E[f(x)\geqslant a]$、$E[f(x)\leqslant a]$为闭集($E=R^1$).

证 先证 $E[f(x)\geqslant a]$是闭集. 设 x_0 是 $E[f(x)\geqslant a]$的一个极限点，则 $E[f(x)\geqslant a]$中有点列$\{x_n\}$，使

$$x_n\to x_0(n\to\infty).$$

由 $x_n\in E[f(x)\geqslant a]$知 $f(x_n)\geqslant a$. 又由 $f(x)$的连续性及极限不等性可得

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\geqslant a.$$

∴ $$x_0\in E[f(x)\geqslant a].$$

即 $$(E[f(x)\geqslant a])'\subseteq E[f(x)\geqslant a].$$

故 $E[f(x)\geqslant a]$为闭集.

同理可证 $E[f(x)\leqslant a]$为闭集.

[2.48] 设区间 $E=[a,b]$上的函数 $f(x)$具有如下性质：$\forall\ a\in R^1$，有 $E[f(x)\geqslant a]$及 $E[f(x)\leqslant a]$都是闭集，试证 $f(x)$是连续函数.

证法一 设 $f(x)$在某点 $x_0\in[a,b]$处不连续，则∃ $\varepsilon_0>0$ 及 $\{x_n\}\subseteq E$，使

$$|x_n-x_0|<1/n\text{ 且 }|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0(n=1,2,\cdots).$$

即有 $$f(x_n)\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0\text{ 或 }f(x_n)\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0.$$

因此，$\{x_n\}$中有无穷多个 x_{n_k}使 $f(x_{n_k})\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0$ 或 $f(x_{n_k})\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0$成立.

若 $f(x_{n_k})\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0$，则令 $a=f(x_0)+\varepsilon_0$，这时有

$$x_{n_k} \in E[f(x) \geqslant a].$$

由于 $x_{n_k} \to x_0$，则 x_0 应属于闭集 $E[f(x) \geqslant a]$，即有 $f(x_0) \geqslant a = f(x_0) + \varepsilon_0$. 这是不可能的. 故必有 $f(x)$ 在 $\forall\, x_0 \in [a,b]$ 处连续. 亦即 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数.

证法二 设 $E[f(x) \geqslant a]$ 及 $E[f(x) \leqslant a]$ 是闭集，则 $E[f(x) < a]$ 和 $E[f(x) > a]$ 是开集. 所以对 $\forall\, x_0 \in E$ 及 $\forall\, \varepsilon > 0$,

$$E[f(x) < f(x_0) + \varepsilon] \cap E[f(x) > f(x_0) - \varepsilon]$$

$$= E[f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon] \text{是开集.}$$

但显然有 $f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$.

$\therefore$ $x_0 \in E[f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon] = G$，即 x_0 是 G 的内点. 于是 $\exists\, \delta > 0$，使

$$N(x_0, \delta) \subseteq G.$$

于是，对 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \text{ 即 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

故 $f(x)$ 在 x_0 处连续，由 $x_0 \in E$ 的任意性得，$f(x)$ 为 $E = [a,b]$ 上的连续函数.

[**2.49**] 设 $f(x)$ 在 $N(x_0, \delta)$ 上有定义，令

$$\omega(x_0) = \lim_{\delta \to 0} \sup\{|f(x') - f(x'')| \mid x', x'' \in N(x_0, \delta)\},$$

称 $\omega(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 的**振幅**.

若 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，且 $f(x)$ 定义在 G 上，则对 $\forall\, t \in \mathbf{R}^1$，点集 $H = \{x \in G \mid \omega(x) < t\}$ 是开集.

证 令 $E = \{|f(x') - f(x'')| \mid x', x'' \in N(x_0, \delta)\}$，则有

$$\omega(x_0) = \lim_{\delta \to 0} \sup E.$$

不妨设 $H \neq \varnothing$. 对 $\forall\, x_0 \in H$，因 $\omega(x_0) < t$，则由 $\omega(x_0)$ 的定义知

$$\omega(x_0) = \lim_{\delta \to 0} \sup E < t.$$

由极限的保号性及 G 为开集知，$\exists\, \delta_0 > 0$，使

$$N(x_0, \delta_0) \subseteq G,$$

$$\text{且} \quad \sup\{|f(x') - f(x'')| \mid x', x'' \in N(x_0, \delta_0)\} < t. \qquad (1)$$

对$\forall\ x\in N(x_0,\delta_0)$可以选取$\delta_1>0$(如$\delta_1<\delta_0-\rho(x,x_0)$),使得

$$N(x,\delta_1)\subseteq N(x_0,\delta_0).$$

由(1)式知,当然更有

$$\sup\{|f(x')-f(x'')|\,|\,x',x''\in N(x,\delta_1)\}<t.$$

此即为$\omega(x)<t$. 由$x\in N(x_0,\delta_0)$的任意性知,$N(x_0,\delta_0)\subseteq H$. 这说明$H$中的点都是内点,故$H$是开集.

[2.50] 设$f(x)$是定义在$E\subseteq \mathrm{R}^n$上的连续函数,对$\forall\ t\in \mathrm{R}^1$,令$E_t=\{x\in E\,|\,f(x)>t\}$,则存在开集$G_t\subseteq \mathrm{R}^n$,使$E_t=E\cap G_t$.

证 对$\forall\ x_0\in E_t$,则$f(x_0)>t$,由于$f(x)$为连续函数,所以由连续函数的保号性知,$\exists\ \delta_{x_0}>0$,使对$\forall\ x\in E\cap N(x_0,\delta_{x_0})$时,有$f(x)>t$. 再由$x\in E\cap N(x_0,\delta_{x_0})$的任意性知

$$E\cap N(x_0,\delta_{x_0})\subseteq E_t,\tag{1}$$

(1)对一切$x_0\in E_t$成立.

令$G_t=\sum_{x\in E_t}N(x,\delta_x)$,此为任意多个开集的和,所以$G_t$仍为开集,且显然$G_t\supseteq E_t$,所以有

$$E\cap G_t\supseteq E_t.\tag{2}$$

而对每个$U(x,\delta_x)$来说,由(1)式知

$$E\cap N(x,\delta_x)\subseteq E_t.$$

从而

$$E\cap\Big(\sum_{x\in E_t}N(x,\delta_x)\Big)=E\cap G_t\subseteq E_t.\tag{3}$$

综合(2)、(3)两式可得

$$E_t=E\cap G_t.$$

[2.51] 试证R^1上任何函数$f(x)$的不连续点所成之集恒可表示成可数个闭集的并.

证 (i) 设$\omega(x)$为$f(x)$在点x处的振幅,即

$$\omega(x)=\lim_{\delta\to 0}\sup\{|f(x')-f(x'')|\,|\,x',x''\in N(x,\delta)\},$$

我们来证明对$\forall\ \varepsilon>0$,$E_\varepsilon=\{x\,|\,\omega(x)\geqslant\varepsilon\}$为闭集.

事实上,设$\forall\ x_0\in(E_\varepsilon)'$,则由极限点定义可知,在$x_0$的任意邻域$N(x_0)$内总有$E_\varepsilon$的点,即总有$\omega(x)\geqslant\varepsilon$的点. 故$f(x)$在

$N(x_0)$上的振幅不小于ε，由于邻域$N(x_0)$的任意性，则$\omega(x_0)\geqslant\varepsilon$。即$x_0\in E_\varepsilon$。故$(E_\varepsilon)'\subseteq E_\varepsilon$。即$E_\varepsilon$为闭集。

(ii) 对任意自然数n，设

$$E_n = \{x \mid \omega(x) \geqslant 1/n\}，令 E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n，$$

下证E就是$f(x)$的全体不连续点所成之集。事实上，设$x\in E$，则必有某E_n，使$x\in E_n$，于是

$$\omega(x) \geqslant 1/n.$$

所以x是$f(x)$的不连续点。

反之，如果x是$f(x)$的不连续点，则$\omega(x)>0$，从而存在充分大的自然数n，使

$$\omega(x) > 1/n > 0,$$

即$x\in E_n$，从而$x\in E$。故E就是$f(x)$的全体不连续点所成之集。注意由(i)所证知，诸E_n都是闭集，因此E就是可数多个闭集的并。

[**2.52**] 是否有[0,1]上的一个函数，它在每个有理点不连续，而在每个无理点连续。

证 是存在这样的函数。如在[0,1]上定义黎曼函数：

$$f(x) = \begin{cases} 1/q，当 x \in (0,1] 且 x = p/q，p、q 互质，q > 0. \\ 0，当 x \in (0,1] 且 x 为无理数. \\ 1，当 x = 0. \end{cases}$$

先证$f(x)$在任何有理点不连续。事实上，对$\forall\ \delta>0$，由实数的稠密性，对任意的有理数$x_0=p/q\in(0,1)$，总存在着无理数x，使$|x-x_0|<\delta$。但是

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|0 - \frac{1}{q}\right| = \frac{1}{q} > \varepsilon_0 = 1/2q.$$

故$f(x)$在任一有理点处不连续。

再证$f(x)$在任一无理点处连续。设x_0为(0,1)中任一无理点。由于$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-0|=|f(x)|$，故只须证明，对$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)|<\varepsilon$即可。

(i) 当x为无理点时$|f(x)|=0<\varepsilon$，结论成立；

(ii) 当 x 为有理点时，对$\forall\ \varepsilon>0$，取$\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>1/\varepsilon$. 则由于只有有限个自然数使

$$q\leqslant\frac{1}{\varepsilon}<n,$$

从而只有有限多个有理数 p/q 使

$$|f(p/q)|=|1/q|=1/q\geqslant\varepsilon.$$

因此存在点 x_0 的一个邻域 $N(x_0,\delta)$，使在该邻域内不含有使 $f(p/q)\geqslant\varepsilon$ 的有理点. 即在该邻域内全是使 $f(p/q)<\varepsilon$ 的点. 故当 $x\in N(x_0,\delta)$时，总有 $|f(x|<\varepsilon$.

结合(i)、(ii)知，$f(x)$在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性可得 $f(x)$ 在任一无理点处连续.

[**2.53**] 是否有[0,1]上的如下函数，它在每个有理点连续，而在每个无理点不连续.

证 不可能有这样的函数.(反证法)

设在[0,1]上有满足条件的函数 $f(x)$. 将[0,1]中的有理点记为 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$. 如下作一闭区间套：首先在[0,1]中任取一个异于 r_1 的有理点记为 $r_1^*(r_1^*\neq r_1)$，因为 $f(x)$在 r_1^* 处连续，所以对 $\forall\ \varepsilon_1>0$，$\exists\ \delta>0$，使当 $x\in N(r_1^*,\delta)$时，有

$$|f(x)-f(r_1^*)|<\varepsilon_1.$$

(当 r_1^* 为端点时，只讨论单侧连续性，下同)

现取 $\delta_1<\delta$，使

$$I_1=[r_1^*-\delta_1/2,\ r_1^*+\delta_1/2]\subseteq N(r_1^*,\delta),$$

且使 $$r_1\notin I_1,\ |I_1|<1/2.$$

显然当 $x\in I_1$ 时，有

$$|f(x)-f(r_1^*)|<\varepsilon_1.$$

其次，在 I_1 中任取异于 r_1、r_1^* 和 r_2 的有理点 r_2^*，仿上面的方法作闭区间

$$I_2=[r_2^*-\delta_2/2,\ r_2^*+\delta_2/2]\subseteq I_1,$$

且使 r_1^*、$r_2\notin I_2$(当然 $r_1\notin I_2$)，$|I_2|<1/2^2$. 显然当 $x\in I_2$ 时，有

$$|f(x)-f(r_2^*)|<\varepsilon_2 \quad (\varepsilon_2<\varepsilon_1).$$

依次作下去，得到一个闭区间套

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

具有如下性质：

(i) $|I_n|<1/2^n$；

(ii) $r_n^* \neq r_k (k=1,2,\cdots,n)$，且 $r_n^* \neq r_k^* (k\neq n)$；

(iii) $r_i \notin I_n (i=1,2,\cdots,n)$；

(iv) 当 $x\in I_n$ 时，有

$$|f(x)-f(r_n^*)|<\varepsilon_n (\text{其中 } \varepsilon_n \downarrow 0).$$

由闭区间套定理知，存在唯一的点

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n,$$

且对 $\forall\ n$，有 $|f(x_0)-f(r_n^*)|<\varepsilon_n$（因 $x_0\in I_n$）. 因此对 $\forall\ \varepsilon>0$，取充分大的 n，使 $2\varepsilon_n<\varepsilon$，则当 $x\in I_n$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x)-f(r_n^*)|+|f(r_n^*)-f(x_0)|$$
$$<2\varepsilon_n<\varepsilon.$$

所以 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 由假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的每个有理点连续，在每个无理点不连续，故 x_0 应为 $[0,1]$ 中的有理点，设为 $r_{n_0}=x_0$.

于是

$$r_{n_0} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

即 r_{n_0} 属于每个 I_n.

但由 I_n 的构造的性质(iii)知，当 $n>n_0$ 时，应有

$$r_{n_0} \notin I_n, \text{更有 } r_{n_0} \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

矛盾.

这一矛盾说明在 $[0,1]$ 上不能定义一个在每个有理点连续而在每个无理点不连续的函数.

第三章　测度理论

内容提要

[定义 3.1]　实 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集

$$I=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid a_i<x_i<b_i,i=1,2,\cdots,n;a_i,b_i\in\mathbf{R}^1\}$$

称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开区间(开方体、开矩体)；

$$\bar{I}=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,$$
$$i=1,2,\cdots,n;a_i,b_i\in\mathbf{R}^1\}$$

称为 $\mathbf{R}^n$ 中的闭区间；而当这里的各不等式至少有一个"<"成立，但又不全是"<"时，称之为非开非闭区间.

n 维开区间 I 的体积定义为

$$|I|\triangleq\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n).$$

注　1° 特别，当 $n=1$ 时，$|I|=b-a$ 表示实轴上区间的长度；当 $n=2$ 时，$|I|$ 表示平面矩形区域的面积；当 $n=3$ 时，$|I|$ 则表示三维欧空间 $\mathbf{R}^3$ 中长方体区域的体积.

2° 长度、面积、体积都是对区间(区域)的测量结果，可统称为"测度". 只要我们有足够而适用的"测量"工具，便可以给 $\mathbf{R}^n$ 中相当广泛的一类集合(不止是区间)赋予"测度"，这样的集类便是可测集类. 本章内容是建立测度理论.

[定义 3.2]　设集 $E\subseteq\mathbf{R}^n$，$\{I_n\}$ 是一列开区间，且

$$E\subseteq\sum_{n\geqslant1}I_n,$$

则称 $\{I_n\}$ 为 E 的一个开覆盖，而称

$$m^*E\triangleq\inf\Big\{\sum_{n\geqslant1}|I_n|\;\Big|\;\{I_n\}\text{ 是 }E\text{ 的开覆盖}\Big\}$$

为点集 E 的勒贝格外测度．简称外测度．

［定理 3.1］ 外测度的基本性质：

(1) 非负性：$\forall\ E\subseteq \mathbf{R}^n, m^*E\geqslant 0$ 且 $m^*\varnothing=0$.

(2) 单调性：若 $A\subseteq B$，则 $m^*A\leqslant m^*B$.

(3) 次可加性：

$$m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n.$$

(4) 距离可加性：若 $\rho(A,B)>0$，则

$$m^*(A+B)=m^*A+m^*B.$$

(5) 平移不变性：设 $E\subseteq \mathbf{R}^n, x_0\in \mathbf{R}^n$，令

$$E+\{x_0\}=\{x+x_0\mid x\in E\},$$

则

$$m^*(E+\{x_0\})=m^*E.$$

注 1° 若 E 的任一开覆盖 $\{I_k\}$ 均有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=+\infty,$$

则 $m^*E=+\infty$，否则 $m^*E<+\infty$. 例如

在 $\mathbf{R}^1$ 中 $E=[0,+\infty), m^*E=+\infty$；

在 $\mathbf{R}^2$ 中 $E=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, y\leqslant 0\}, m^*E=+\infty$.

2° $\mathbf{R}^n$ 中任意集合 E 的外测度总是存在的（非负有限值或为 $+\infty$）．由此可知，外测度是定义于 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$（由 $\mathbf{R}^n$ 的一切子集所构成的集类）上的一个集函数：

$$\mathscr{B}(\mathbf{R}^n)\xrightarrow{m^*}[0,+\infty)\cup\{+\infty\}.$$

3° 由 $m^*E=\inf\left\{\sum|I_n|\mid\{I_n\}\text{为 }E\text{ 的开覆盖}\right\}$ 及下确界的定义知：

(i) 对于 E 的任一开覆盖 $\{I_n\}$ 都有

$$m^*E\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|;$$

(ii) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ E$ 的一个开覆盖 $\{I_n\}$，使

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| < m^*E + \epsilon.$$

这两条在证明问题时常常用到，必须注意.

4° 外测度的性质(1)～(3)是本质的. 用这三条作公理可定义如下推广了的"外测度"概念：

设 X 非空，μ^* 是定义于 $\mathscr{P}(X)$上的一个取广义实值的集函数，且满足：

(i) $\mu^*E \geqslant 0 (E \subseteq X)$，且 $\mu^*\varnothing = 0$；

(ii) 设 E_1、$E_2 \subseteq X$，若 $E_1 \subseteq E_2$，则 $\mu^*E_1 \leqslant \mu^*E_2$；

(iii) $\mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*E_n \quad (E_n \subseteq X, n=1,2,\cdots)$.

则称 μ^* 是 X 上的一个外测度.

[定义 3.3] (1) 设 $E \subseteq \mathrm{R}^n$，I 为开区间，$E \subseteq I$，而$\{I_n\}$是一串开区间，且

$$I - E \subseteq \sum_{n=1}^{\infty}I_n，\text{即 } I - \sum_{n=1}^{\infty}I_n \subseteq E,$$

则称 $m_*E \triangleq \sup\left\{|I| - \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\right\}$为 E 的内测度.

显然有

$$\begin{aligned} m_*E &= \sup\left\{|I| - \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\right\} = |I| - \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\right\} \\ &= |I| - m^*(I-E). \end{aligned}$$

(2) 如果集 $E(\subseteq \mathrm{R}^n)$满足：$m^*E = m_*E$，则称 E 为勒贝格可测集. 而称

$$mE \triangleq m^*E = m_*E$$

为 E 的勒贝格测度，简称为测度.

注 1° $\forall E \subseteq \mathrm{R}^n$：$m_*E \leqslant m^*E$.

2° 内测度具有非负性、单调性、距离可加性和平移不变性，而次可加性应为：若 $AB = \varnothing$，则

$$m_*(A + B) \geqslant m_*A + m_*B.$$

[定义 3.4] (勒贝格可测集的基本定义)设 $E\subseteq \mathrm{R}^n$,若$\forall T\subseteq \mathrm{R}^n$,有

$$m^*T = m^*(TE) + m^*(T\mathscr{C}E). \qquad (*)$$

则称 E 为勒贝格可测集.简称为(L)可测集,其中 T 称为试验集.

当 E 为(L)可测集时,称 m^*E 值为 E 的(L)测度,记为

$$mE \triangleq m^*E.$$

注 1° 今后我们以定义 3.4 作为可测集的基本定义,可测集的各种等价条件将在后面的题解中给出.

2° 与外测度不同的是,并非任一集 $E(\subseteq \mathrm{R}^n)$都可测.不可测集的例子见郑维行、王声望《实变函数与泛函分析概要》(上)第 46～48 页. 可测集的全体称为可测集类,简记为$\mathfrak{m}(\mu)$.可以证明,$\mathfrak{m}$ 与 $\mathscr{B}(\mathrm{R}^n)$的势是相同的.由此可见,可测集是"相当多"的.

3° 当 E 可测时,有$(*)$式成立,而在一般情形下,只有(且总有):

$$m^*(T) \leqslant m^*(TE) + m^*(T\mathscr{C}E).$$

此式由外测度的次可加性、单调性及关系式

$$T \subseteq (TE) + (T\mathscr{C}E)$$

立即可得.故由定义 3.4 证明集 E 可测的关键是:$\forall T\subseteq \mathrm{R}^n$,有

$$m^*T \geqslant m^*(TE) + m^*(T\mathscr{C}E).$$

[定义 3.5] (1) 设 $F_1,F_2,\cdots,F_n,\cdots$是一列闭集,则称

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$$

为 F_σ 型集(即称闭集列的可列并为 F_σ 型集).

(2) 设 $G_1,G_2,\cdots,G_n,\cdots$为一列开集,则称

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$$

为 G_δ 型集(即 G_δ 型集是开集列的可列交).

(3) 凡属可以从开集出发,用取余集、取有限或可数个集合的并集或交集等方法而得到的集合,统称为 Borel 集或B-可测集.

注 由定义可知,开集、闭集、F_σ 型集及 G_δ 型集都是 Borel

集；F_σ 型集不一定是闭集，G_δ 型集不一定是开集.

［**定理 3.2**］ 可测集的基本性质：

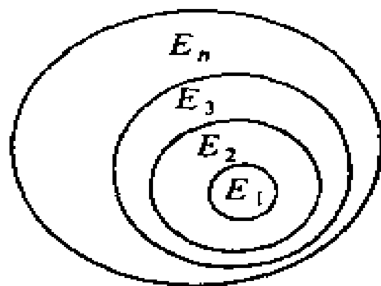


图 3—1

（1）非负性：$\forall$ 可测集 E，$mE\geqslant 0$ 且 $m\varnothing=0$.

（2）单调性：若 A、B 都可测且 $A\subseteq B$，则

$$mA\leqslant mB.$$

（3）次可加性：如图 3—1 所示，若 E_i 可测（$i=1,2,\cdots$），则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 可测，且

$$m\left(\sum_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}mE_i.$$

特别，当 A、B 都可测时便有 $A+B$ 可测，且

$$m(A+B)\leqslant mA+mB.$$

（4）完全可加性：设 E_i 可测（$i=1,2,\cdots$）且 $E_iE_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$m\left(\sum_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}mE_i.$$

（5）平移不变性：若 E 可测，$x_0\in\mathbf{R}^n$，则 $E+\{x_0\}=\{x+x_0|x\in E\}$ 亦可测，且

$$m(E+\{x_0\})=mE.$$

注 显而易见，可测集的可加性比外测度要良好得多，其它性质与外测度相同. 正是距离可加性改进为完全可加性，给我们带来了很大方便.

［**定理 3.3**］ 可测集的运算性质

（1）空集 $\varnothing$ 可测，且 $m\varnothing=0$.

（2）若 E 可测，则 $\mathscr{C}E$ 可测.

（3）若 E_1、E_2 可测，则 E_1+E_2，E_1E_2，E_1-E_2 皆可测. 且当 $E_1E_2=\varnothing$ 时有 $m(E_1+E_2)=mE_1+mE_2$；当 $E_2\subseteq E_1$ 时有 $m(E_1-E_2)=mE_1-mE_2$.

(4) 若$\{E_i\}$为递增可测集列，$E_n\subseteq E_{n+1}(i=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty} mE_n = m\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = m\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right);$$

若$\{E_i\}$为递减可测集列，$E_n\supseteq E_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，

则
$$\lim_{n\to\infty} mE_n = m\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = m\left(\prod_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

[**定理 3.4**] 可测集的构造性质

(1) R^n 中的区间(开的、闭的或非开非闭的)是可测的，且有

$$mI = |I| = |\bar{I}|.$$

于是结合可测集的性质可知：R^n 中任一开集 G 或任一闭集 F 皆为可测集. 进而，一切 Borel 集都可测.

(2) 若 E 可测，则对$\forall\ \epsilon>0$，$\exists$ 开集 $G\supseteq E$ 与闭集 $F\subseteq E$，使

$$mG - mE = m(G - E) < \varepsilon,$$
$$mE - mF = m(E - F) < \varepsilon.$$

(3) 若 E 可测，则$\exists$ G_δ 型集 H、F_σ 型集 K 及零测集 Z_1 和 Z_2，使

$$E = H - Z_1 = K + Z_2.$$

(至此，可测集的构造就很清楚了)

(4) 若 $E\subseteq\mathrm{R}^n$(E 不一定可测)，则$\exists$ G_δ 型集 $H\supseteq E$，使

$$mH = m^* E.$$

称 H 为 E 的等测包.

(5) 对 R^n 中任一集列(不一定可测)$\{E_n\}$，若 $E_n\subseteq E_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，则有

$$\lim_{n\to\infty} m^* E_n = m^*\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right).$$

注 由本定理可知，可测集类包含 Borel 集类，而任一可测集均可表为一 Borel 集与一零测集之并(或差)，但又确实存在非 Borel 集的可测集.

[**定义 3.6**] 设 A、B 是二点集，则定义 A 与 B 的直积为

$$A\times B \triangleq \{(x,y)\,|\,x\in A, y\in B\}.$$

设 $E\subseteq \mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q$，$x_0\in\mathrm{R}^p$，则定义超平面 $x=x_0$ 截 E 之截口为

$$E_{x_0}\triangleq\{y\mid y\in\mathrm{R}^q,\text{且}(x_0,y)\in E\}.$$

如：$p=1,q=2,E=\{(x,y,z)\mid |x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1,|z|\leqslant 1\}$，当 $x_0=0$ 时有

$$E_0=\{(y,z)\mid |y|\leqslant 1,|z|\leqslant 1,(0,y,z)\in E\}.$$

注　$E_{x_0}\subseteq\mathrm{R}^q$；超平面 $\{x=x_0\}\subseteq\mathrm{R}^p$.

[定义 3.7]　设 $\pi(p)$ 是关于点 $p\in E$ 的命题，若∃ $N\subseteq E$，$mN=0$，使 $\pi(p)$ 在 $E-N$ 上处处成立. 则称 $\pi(p)$ 在 E 上几乎处处成立，记为

"$\pi(p)a.e$ 于 E" 或 "$\pi(p)p.p.$ 于 E".

[定理 3.5]　若 A 和 B 分别是 R^p 和 R^q 中的可测集，则 $C=A\times B$ 是 $\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q$ 中的可测集，且

$$mC=mA\cdot mB.$$

[定理 3.6]　(1) 若 $E\subseteq\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q$ 为零测集，则

$$mE_x=0\quad a.e\text{ 于 }\mathrm{R}^p(x\in\mathrm{R}^p).$$

(2) 若 $E\subseteq\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q$ 为可测集，则

E_x 可测 $a.e$ 于 R^p.

附　录

[上、下确界的定义]：

设 $E\subseteq\mathrm{R}^1$，若∃ $\beta\in\mathrm{R}^1$ 使得

(1) $\forall\ x\in E,x\leqslant\beta$，

(2) $\forall\ \mu<\beta,\exists\ x\in E:x>\mu$，即

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ x\in E:x>\beta-\varepsilon$，

则称 β 为数集 E 的上确界，记为

$$\beta=\sup E.$$

若∃ $\alpha\in\mathrm{R}^1$，使得

(1) $\forall\ x\in E:x\geqslant\alpha$，

(2) $\forall\ \mu>\alpha,\exists\ x\in E:x<\mu$，即

$\forall \varepsilon>0, \exists x \in E: x<\alpha+\varepsilon$，则称 α 为数集 E 的下确界，记为

$$\alpha = \inf E.$$

问题解答

一、回答问题并说明理由

[3.1] 设 $m^*E=0$，能否断定 E 可测？能否断定 E 的任一子集可测？

解 都能断定. 我们给出如下命题：

若 $m^*E=0$，则

(i) E 可测，且 $mE=0$；

(ii) E 的任一子集 $E_1(\subseteq E)$ 可测，且 $mE_1=0$.（以后我们将测度为零的集合称为零测集）. 证明如下：

(i) 由 $0\leqslant m_*E\leqslant m^*E=0$，有

$$m^*E = m_*E = 0,$$

所以 E 可测，且 $mE=m^*E=0$.

另证 设 T 为任一集，则由 $TE\subseteq E$ 得

$$m^*(TE) \leqslant m^*E = 0.$$

$$\therefore \qquad m^*(TE)=0.$$

而由 $T\mathscr{C}E\subseteq T$ 得 $m^*(T\mathscr{C}E)\leqslant m^*T$，

于是 $$m^*T\geqslant m^*(TE)+m^*(T\mathscr{C}E).$$

故由可测集的定义（定义 3.4）知 E 可测，且

$$mE = m^*E = 0.$$

(ii) 由 $E_1\subseteq E$ 得

$$0 \leqslant m^*E_1 \leqslant m^*E = 0,$$

$$m^*E_1 = 0$$

故由(i)得 E_1 可测，且 $mE_1=0$.

[3.2] 有限点集和可列点集是否可测?

解 是可测的. 因为至多可数集(有限集或可列无限集)是零测集. 事实上,若 E 为有限集,

$$E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\},$$

则$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists$ 开区间 I_1、I_2、$\cdots$、I_n 使 $x_i\in I_i(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $|I_i|<\varepsilon/n$,于是

$$0\leqslant m^*E\leqslant\sum_{i=1}^{n}|I_i|<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon.$$

故 由 ε 的任意性得知 $m^*E=0$.

若 E 为可列集,设

$$E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$

则 $\forall\ \varepsilon>0$,存在开区间列 $\{I_i\}$,使 $x_i\in I_i(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $|I_i|<\varepsilon/2^i$,于是

$$0\leqslant m^*E=\sum_{i=1}^{\infty}|I_n|<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon.$$

故 $m^*E=0$,从而 $mE=0$.

总之,至多可数集是零测集.

注 由本题可推出如下结论:

1° R^n 中的全部有理点所成的集为零测集;

2° 单调函数的不连续点所成的集为零测集(因为单调函数的不连续点所成的集为至多可数集). 等等.

[3.3] 可列个零测集之并集是否为零测集?

解 是. 证明如下:

设
$$mE_n=0,\ n=1,2,\cdots$$

令
$$E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n,$$

则由可测集性质知 E 可测,且有

$$0\leqslant mE=m\Big(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mE_n=0.$$

$\therefore\quad mE=0.$

注 将[3.1]和[3.3]两题结合可得下述命题

若 $m^* E_n=0, n=1,2,\cdots$. 则

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

为零测集.

[3.4] 设 $E(\subseteq \mathbf{R}^n) \neq \varnothing$，但 $E' = \varnothing$，能否断定 E 可测?

解 若 $E \neq \varnothing$ 但 $E' = \varnothing$，则 E 为零测集. 事实上，设 $E_1 = \{E$ 中孤立点$\}$，$E_2 = \{E$ 中极限点$\}$，则

$$E = E_1 \cup E_2.$$

但由 $E' = \varnothing$ 可知

$$E_2 = E' \cap E = \varnothing \cap E = \varnothing.$$

于是 $E = E_1$，即 E 是孤立点集，而孤立点集是至多可数集.

故 $mE = 0$.

[3.5] Cantor 集 P_0 是否为零测集?

解 我们指出，Cantor 集 P_0 是一个特殊集合，具有如下性质：

(i) P_0 是完备集，

(ii) P_0 是不可数集，

(iii) P_0 是疏朗集，

(iv) P_0 是零测集.

这里只证明(iv). 因 P_0 的余集 $G_0 = [0,1] - P_0$ 是开集，可记

$$G_0 = \sum_{n=1}^{\infty} G_n,$$

其中 G_n 为第 n 次手续中去掉的所有开区间之并集，由 Cantor 集的作法知，G_n 为 2^{n-1} 个互不相交的长度为 $1/3^n$ 的开区间之并，且 $G_n G_m = \varnothing (n \neq m)$.

于是由 G_0 可测知 $P_0 = [0,1] - G_0$ 可测，而

$$P_0 + G_0 = [0,1], \ P_0 G_0 = \varnothing.$$

$\therefore \quad mP_0 + mG_0 = m[0,1] = 1.$

故 $\quad mP_0 = 1 - mG_0$

$$=1-m\left(\sum_{n=1}^{\infty}G_n\right)=1-\sum_{n=1}^{\infty}mG_n$$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=1-1=0.$$

注 由本题可知，零测集不一定是至多可数集.

[3.6] 若 $mE=0$，是否一定有 $m\overline{E}=0$？

解 不一定. 如 $E=\{x\in\mathbf{R}^1 \mid 0\leqslant x\leqslant 1, x$ 为有理数$\}$.
因有理数集为可列集，所以 $mE=0$. 然而

$$m\overline{E}=m[0,1]=1.$$

[3.7] 对任一开集 G，是否一定有 $mG=m\overline{G}$？

解 不一定. 如对[0,1]中的全部有理数 $\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$ 作开集如下：

$$G=\sum_{n=1}^{\infty}\left(r_n-\frac{1}{2^{n+2}},\ r_n+\frac{1}{2^{n+2}}\right),$$

则 G 是开集，且

$$mG=m^*G\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

但是由 $\overline{G}\supseteq[0,1]$ 可得

$$m\overline{G}\geqslant m[0,1]=1.$$

故 $mG\neq m\overline{G}$.

[3.8] $\mathbf{R}^1$ 中至少含一个内点的集 E 的测度（设 E 可测）可否为零？

解 不可能. 不妨设 $x_0\in E$ 是 E 的一个内点，则 $\exists\ \delta_0>0$ 使 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq E$.

所以由测度的单调性知

$$mE\geqslant m(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)=2\delta_0>0.$$

注 由此可知，非空开集之测度必大于0.

[3.9] 设 E 为 $\mathbf{R}^1$ 的真子集，且 $m^*E>0$，问是否 E 中必含有区间？

解 不一定. 如[0,1]上的无理点集 E 不含任何区间，且 $E=$

$[0,1]-Q$(Q 为有理数集). 于是

$$m^*E = mE = m[0,1] - m(Q \cap [0,1]) = 1 - 0 = 1 > 0.$$

注 在后面的习题中将看到,R^1 中存在着不含任何区间的闭集(甚至完备集),其测度为正值.

[**3.10**] 设开集 G_1 是开集 G_2 的真子集,则是否一定有 $mG_1 < mG_2$?

解 不一定. 如

$$G_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad G_2 = (0,1).$$

显然,G_1,G_2 都是开集,且 G_1 是 G_2 的真子集.

但
$$mG_1 = mG_2 = 1.$$

故在一般情况下,若 $G_1 \subseteq G_2$,则只能肯定

$$mG_1 \leqslant mG_2.$$

[**3.11**] 如果将外测度的定义改为"有界集 E 的外测度是包含 E 的闭集的测度的下确界."是否合理?

解 不合理. 如设(0,1)中的有理点集为 Q,无理点集为 P,则

$$(0,1) = Q \cup P.$$

显然 $\overline{Q} = \overline{P} = [0,1]$是含 Q 和 P 的"最小"闭集. 于是在所给的定义下应有

$$m^*P = m^*Q = 1.$$

我们从两方面说明这将会引起矛盾:

(i) 由内测度定义知

$$m_*Q = |(0,1)| - m^*((0,1) - Q) = 1 - m^*P = 1 - 1 = 0.$$

$\therefore \quad m_*Q = 0 < 1 = m^*Q.$

故 Q 不可测(Q 是可列集),与已知事实 Q 为零测集相矛盾.

(ii) 即使采用其它手段回避上述矛盾,即设法修改内测度定义使 Q 可测(即使得 $m_*Q=1$),且 $mQ=1$,则又会产生下面的问

题：

$$mQ + mP = 1 + 1 > m(0,1) = m(Q \cup P).$$

这就破坏了测度的有限可加性.

[3.12] 设 $AB=\varnothing$，问在什么条件下有

$$m^*(A+B) = m^*B?$$

解 只要 $m^*A=0$（不管 A 是否为空集）即可. 我们有下述命题：若 $m^*A=0$，B 任意，则

$$m^*(A+B) = m^*B.$$

事实上，由 $B\subseteq A+B$ 有

$$m^*B \leqslant m^*(A+B),$$

而由 $m^*A=0$，又有

$$m^*(A+B) \leqslant m^*A + m^*B = m^*B.$$

$\therefore$ $$m^*(A+B) = m^*B.$$

[3.13] 设 E 为 R^1 上的不可测集，A 为零测集，问 EA、$E\mathscr{C}A$ 是否可测？

解 可以断定：

(i) EA 为零测集. 因 $EA\subseteq A$，所以有

$$0 \leqslant m^*(EA) \leqslant m^*A = mA = 0,$$

即有 $m^*(EA)=0$，从而 $m(EA)=0$.

(ii) $E\mathscr{C}A$ 不可测. 若不然，即假定 $E\mathscr{C}A$ 可测，而由(i)知 EA 可测，所以

$$E = (EA) + (E\mathscr{C}A).$$

由可测集的运算性质知，集 E 可测，与题设矛盾，故 $E\mathscr{C}A$ 不可测.

[3.14] 对于有界集 $E\subseteq\mathrm{R}^1$，是否必有 $m^*E<+\infty$？

解 是. 证明如下：

$\because$ E 有界， $\therefore$ $\exists\ M>0, \forall\ x\in E, |x|<M$.

于是 $$E \subseteq (-M, M).$$

故 $$m^*E \leqslant m(-M, M) = 2M < +\infty.$$

[3.15] 设 $E\subseteq\mathrm{R}^1$ 为无界可测集，是否必有 $mE=+\infty$ 或 $mE>0$？

解　不一定. 如 R^1 中的自然数集 $N=\{1,2,\cdots\}$ 是无界可测集，且 $mN=0$（因集 N 是可数集）.

[3.16]　是否存在闭集 $F\subsetneq[a,b]$（F 是 $[a,b]$ 的真闭子集），使 $mF=b-a$?

解　不存在. 先证明下述命题：

若 F 是 $[a,b]$ 的真闭子集，则

$$E=F\cup\{a\}\cup\{b\}$$

亦是 $[a,b]$ 的真闭子集（$\{a\}$、$\{b\}$ 是单点集）.

事实上，若 $a,b\in F$，则命题显然. 若 a,b 至少有一个不含于 F，不妨设 $\{a\}\not\subseteq F$（$a\notin F$），则必 $\exists\ \delta>0$，使

$$[a,a+\delta)\cap F=\varnothing.$$

（否则 a 就是 F 的极限点，从而 $a\in F$）于是

$$[a,b]-E=(a,b)-F\supseteq(a,a+\delta).$$

故　E 是 $[a,b]$ 的真闭子集.

注意到　$E\cap([a,b]-E)=\varnothing$，而

$$[a,b]=E\cup([a,b]-E),$$

$$\therefore\qquad m[a,b]=mE+m([a,b]-E).$$

又

$$[a,b]-E\supseteq(a,a+\delta),$$

$$\therefore\qquad m([a,b]-E)\geqslant m(a,a+\delta)=\delta>0$$

故

$$mF\leqslant mE=m[a,b]-m([a,b]-E)$$
$$\leqslant b-a-\delta<b-a.$$

[3.17]　设 $E=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，其中 $E_1\subseteq E_2\subseteq\cdots\subseteq E_n\subseteq\cdots$，且

$$mE_n<\infty(n=1,2,\cdots),$$

问 E 能否有有限测度？能否有无穷测度？

解　都可能. 举例如下：

(i) 设 $E_n=[0,\ 1-1/(n+1)]$，则

$$E_n\subseteq E_{n+1}\subseteq[0,1),$$

$$mE_n=1-\frac{1}{n+1}<\infty,$$

但是，由 $E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n=[0,1)$ 知

$$mE=1<+\infty.$$

(ii) 设 $E_n=(0,n)$，则

$$mE_n=n<\infty,$$

但是，由

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n=(0,+\infty)\text{ 知}$$

$$mE=+\infty.$$

[3.18] 设 $E=\prod_{n=1}^{\infty}E_n$，其中 $E_1\supseteq E_2\supseteq E_3\supseteq\cdots$ 且

$$mE_n=\infty(n=1,2,\cdots),$$

问 E 能否有无穷、有限、零测度？

解 都可能. 举例如下：

(i) 设 $E_n=[(n-1)/n,+\infty)$，则

$$E=[1,+\infty),mE=+\infty;$$

(ii) 设 $E_n=(n,+\infty)$，则

$$E=\varnothing,mE=0;$$

(iii) 设 $E_n=(0,1)\cup(n,+\infty)$，则

$$E=(0,1),mE=1.$$

[3.19] 将 R^1 中的可测集类 $\mathfrak{m}$ 的势与 R^1 的一切子集所成的类 $\mathscr{B}(\mathrm{R}^1)$ 的势作一比较，可得什么结论？

解 我们证明：$\bar{\bar{\mathfrak{m}}}=\overline{\overline{\mathscr{B}(\mathrm{R}^1)}}$.

因为 $\forall$ 可测集 $E\in\mathfrak{m}$，显然 $E\in\mathscr{B}(\mathrm{R}^1)$，即 $\mathfrak{m}\subseteq\mathscr{B}(\mathrm{R}^1)$. 因此

$$\bar{\bar{\mathfrak{m}}}\leqslant\overline{\overline{\mathscr{B}(\mathrm{R}^1)}}. \tag{1}$$

另一方面，我们知道 Cantor 集 P_0 是完备的零测集，即有

$$\overline{\overline{P_0}}=\overline{\overline{\mathrm{R}^1}}=c,mP_0=0.$$

由 $\overline{\overline{P_0}}=\overline{\overline{\mathrm{R}^1}}$ 得

$$\overline{\overline{\mathscr{B}(P_0)}}=\overline{\overline{\mathscr{B}(\mathrm{R}^1)}},$$

由 $mP_0=0$ 知，$\forall\ E\subseteq P_0$ 有 $mE=0$，从而 $\mathscr{B}(P_0)$ 是一个零测集类，

故

$$\mathscr{B}(P_0) \subseteq \bar{\mathfrak{m}}.$$

所以

$$\bar{\mathfrak{m}} \geqslant \overline{\overline{\mathscr{B}(P_0)}} = \overline{\overline{\mathscr{B}(\mathrm{R}^1)}} \tag{2}$$

由(1)、(2)得 $\bar{\mathfrak{m}} = \overline{\overline{\mathscr{B}(\mathrm{R}^1)}}$.

[3.20] 设 E 为 R^1 中的任一集合，定义

$$\mu E = \begin{cases} m, & \text{当 } E \text{ 只含 } m \text{ 个点时} (m = 0,1,2,\cdots) \\ +\infty. & \text{当 } E \text{ 为无穷点集时} \end{cases}$$

问 μ 是否为 R^1 上的一个外测度？

解 是. 我们逐条证明 μ 满足定理 3.1 中注 4°所述的(i)～(iii).

(i) 由 μ 的定义显然可知，$\forall\ E \subseteq \mathrm{R}^1$,

$$\mu E \geqslant 0, \text{且 } \mu\varnothing = 0.$$

(ii) 设 $E_1 \subseteq E_2, E_i \subseteq \mathrm{R}^1 (i=1,2)$，则有：

(a) 当 E_1 为无限集时，E_2 也必是无限集，这时

$$\mu E_1 = \mu E_2 = +\infty;$$

(b) 当 E_2 为有限集时，E_1 也必是有限集，且 E_1 所含元素(点)的个数不超过 E_2 所含点的个数. 即有

$$\mu E_1 \leqslant \mu E_2;$$

(c) 当 E_1 为有限集而 E_2 为无限集时，

$$\mu E_1 < +\infty = \mu E_2.$$

(iii) 令 $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$，则

(a) 若 $\{E_n\}$ 至少有一个无穷点集，则 E 也是无穷集，这时

$$\mu E = +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n;$$

(b) 若 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 都是有限点集，这时如果 $E_n \neq \varnothing (n = 1,2,\cdots)$，就有 $\mu E_n \geqslant 1 (n=1,2,\cdots)$. 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty \geqslant \mu E,$$

(如果有无穷多个 E_n 非空,便有这一结果);如果 $\{E_n\}$ 中只有有限个非空,不妨设 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 非空,由于 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 均为非空有限集,则

$$E=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_m\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$$

亦为有限集,这时若 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 两两不交便有

$$\mu E=\mu E_1+\cdots+\mu E_m=\sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n.$$

若至少有两个 E_i 含公共点($i=1,2,\cdots$),则有

$$\mu E<\mu E_1+\cdots+\mu E_m=\sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n.$$

总之有

$$\mu E\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu E_n.$$

故 μ 为 R^1 上的一个外测度.

二、外测度、内测度及可测集的等价条件

[3.21] 证明:任一点集 E 的外测度等于包含它的开集 G 的测度的下确界. 即

$$m^*E=\inf\{mG\,|\,E\subseteq G,G\text{ 为开集}\}\qquad(*)$$

证 一方面,$\forall$ 开集 $G\supseteq E$,显然有

$$m^*E\leqslant m^*G=mG,$$

$$\therefore\qquad m^*E\leqslant\inf\{mG\,|\,E\subseteq G,G\text{ 为开集}\}.\qquad(1)$$

另一方面,若 $\{I_n\}$ 是 E 的开覆盖,其中诸 I_n 为开区间 ($n=1,2,\cdots$),则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_n$ 是开集,于是

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}I_n\,\Big|\,E\subseteq\sum_{n=1}^{\infty}I_n,I_n\text{ 为开区间}\right\}$$
$$\subseteq\{G\,|\,E\subseteq G,G\text{ 为开集}\},$$

所以

$\inf\{mG\,|\,E\subseteq G,G$ 为开集$\}$

$$\leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|;E\subseteq\sum_{n=1}^{\infty}I_n,I_n\text{ 为开区间}\right\}=m^*E. \tag{2}$$

由(1)、(2)知(*)式成立.

注 我们今后常用此外测度的等价定义来处理问题,这样可以大大简化证明过程.

[3.22] 设 $E(\subseteq\mathbf{R}^1)$有界,$I_1,I_2,\cdots$是一列闭区间(可以相交),其并覆盖 E,试证:

$$m^*E=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}mI_n\,|\,E\subseteq\sum_{n=1}^{\infty}I_n,I_n\text{ 为闭区间}\right\}.$$

对于 $\mathbf{R}^n$,结论是否成立?

证 一方面,对任一列覆盖 E 的闭区间 I_1、I_2、$\cdots$,由外测度的单调性和次可加性,可以得到:

$$m^*E\leqslant m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}I_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*I_n=\sum_{n=1}^{\infty}mI_n.$$

所以

$$m^*E\leqslant\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}mI_n\,|\,E\subseteq\sum_{n=1}^{\infty}I_n,I_n\text{ 是闭区间}\right\}.$$

另一方面,由外测度及下确界的定义,对$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ E$ 的一个开覆盖

$$\sum_{n=1}^{\infty}J_n(\supseteq E),J_n\text{ 是开区间},n=1,2,\cdots$$

使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|J_n|<m^*E+\varepsilon.$$

取 $I_n=\overline{J_n}(n=1,2,\cdots)$,则 $I_1,I_2,\cdots$是闭区间列,且

$$E\subseteq\sum_{n=1}^{\infty}J_n\subseteq\sum_{n=1}^{\infty}I_n.$$

而

$$mI_n=mJ_n=|J_n|,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}mI_n=\sum_{n=1}^{\infty}|J_n|<m^*E+\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} mI_n \mid E\subseteq\sum_{n=1}^{\infty} I_n, I_n \text{ 为闭区间}\right\}\leqslant m^*E.$$

命题得证. 此命题对于 $\mathbf{R}^k$ 亦成立，证明过程完全一样，只要将每个 I_n 看成是 $\mathbf{R}^k$ 中的闭区间（闭长方体）即可.

[3.23] 试证

$$m_*E=\sup\{mF\mid F\subseteq E, F \text{ 为闭集}\}.$$

证 一方面，因闭集 $F\subseteq E$，所以由闭集的可测性及内测度的单调性，有

$$mF=m_*F\leqslant m_*E,$$

于是 $\sup\{mF\mid F\subseteq E, F \text{ 为闭集}\}\leqslant m_*E.$ (1)

另一方面，设 I 是一个开区间，$E\subseteq I$.

而闭集 $F\subseteq E$，则

$$\mathscr{C}_I F=I-F \text{ 为开集，且 } I-F\supseteq I-E.$$

因此，由 $m^*E=\inf\{mG\mid E\subseteq G, G \text{ 为开集}\}$ 可知

$$\inf\{m(I-F)\mid I-E\subseteq I-F\}=m^*(I-F)$$

$$\geqslant m^*(I-E)=\inf\{mG\mid I-E\subseteq G, G \text{ 为开集}\}.$$

故由定义 3.3 知

$$m_*E=|I|-m^*(I-E)$$

$$\leqslant|I|-\inf\{m(I-F)\mid I-E\subseteq I-F, F \text{ 为闭集}, F\subseteq E\}$$

$$=\sup\{mF\mid F\subseteq E, F \text{ 为闭集}\}. \quad (2)$$

由(1)、(2)得证.

注 1° 我们以后常用此内测度定义来处理问题，使问题的证明简化.

2° 对于可测集 E 有 $mE=m^*E=m_*E$，所以，当 E 可测时，由[3.21]和[3.23]知

$$mE=\begin{cases}m_*E=\sup\{mF\mid F\subseteq E, F \text{ 为闭集}\},\\ m^*E=\inf\{mG\mid E\subseteq G, G \text{ 为开集}\}.\end{cases}$$

我们常常根据需要而选用测度的不同形式来处理问题，具有一定

的灵活性和技巧性. 请看下面的几题.

[**3.24**] 试证,外测度与可测集有如下关系:

$$m^*E = \inf\{mA \mid E \subseteq A, A \text{ 为可测集}\}.$$

证 一方面,因为

$$\{G \mid E \subseteq G, G \text{ 为开集}\} \subseteq \{A \mid E \subseteq A, A \text{ 可测}\},$$

所以

$$\begin{aligned} m^*E &= \inf\{mG \mid E \subseteq G, G \text{ 为开集}\} \\ &\geqslant \inf\{mA \mid E \subseteq A, A \text{ 可测}\}. \end{aligned}$$

另一方面,记

$$\inf\{mA \mid E \subseteq A, A \text{ 可测}\} = a,$$

则由下确界定义,对$\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists$ 可测集 $A_1 \supseteq E$,

使
$$mA_1 < a + \varepsilon/2.$$

进而由定理 3.4(2)知$\exists$ 开集 $G_1 \supseteq A_1 (\supseteq E)$使

$$mG_1 < mA_1 + \varepsilon/2 < a + \varepsilon.$$

所以

$$\begin{aligned} m^*E &= \inf\{mG \mid E \subseteq G, G \text{ 为开集}\} \\ &\leqslant a = \inf\{mA \mid E \subseteq A, A \text{ 可测}\}. \end{aligned}$$

故得

$$m^*A = \inf\{mA \mid E \subseteq A, A \text{ 可测}\}.$$

[**3.25**] 试证,若 E 有界可测,则下面两个定义是等价的(即定义 3.3(2)与定义 3.4 等价):

(1) $m^*E = m_*E$.

(2) $\forall\ T \subseteq \mathrm{R}^n, m^*T = m^*(TE) + m^*(T\mathscr{C}E)$.

证 (i) 先证(2)$\Longrightarrow$(1).

设对$\forall\ T \subseteq \mathrm{R}^n$,

$$m^*T = m^*(TE) + m^*(T\mathscr{C}E).$$

现取 T 为开区间 I 且使 $E \subseteq I$,便有

$$\begin{aligned} |I| = m^*I &= m^*(IE) + m^*(I\mathscr{C}E) \\ &= m^*E + m^*(I - E), \end{aligned}$$

从而有

$$m^*E = |I| - m^*(I - E) = m_*E.$$

(ii) 再证(1)⟹(2). 先给出一个引理：

引理 设有界集 $E \subseteq I$(开区间)满足

$$m^*E = m_*E,$$

则 $\forall A \subseteq I$,

$$m^*A = m^*(AE) + m^*(A\mathscr{C}E).$$

事实上，由 $A = (AE) \cup (A\mathscr{C}E)$ 得

$$m^*A \leqslant m^*(AE) + m^*(A\mathscr{C}E) \qquad (*)$$

再证相反的不等式，由于

$$m^*A = \inf\{mG \mid A \subseteq G, G \text{ 为开集}\},$$

故由下确界定义，有开集 G, $A \subseteq G \subseteq I$, 使

$$mG < m^*A + \varepsilon.$$

因为 G 可测(定义 3.4 意义下)，所以 $\mathscr{C}G$ 可测.

而 $$EG \subseteq G,\ E\mathscr{C}G \subseteq \mathscr{C}G,$$

所以

$$\begin{aligned} m_*E = m^*E &= m^*(EG) + m^*(E\mathscr{C}G) \\ &= m^*(IEG) + m^*(IE\mathscr{C}G), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m^*(I - E) &= m^*[(I - E)G] + m^*[(I - E)\mathscr{C}G] \\ &= m^*(IG\mathscr{C}E) + m^*(I\mathscr{C}G \cdot \mathscr{C}E). \end{aligned}$$

由定义 3.3(1)有

$$|I| = m_*E + m^*(I - E),$$

但

$$\begin{aligned} & m_*E + m^*(I - E) \\ & = m^*(IGE) + m^*(IG\mathscr{C}E) \\ & \quad + m^*(I\mathscr{C}G \cdot E) + m^*(I\mathscr{C}G \cdot \mathscr{C}E) \\ & \geqslant m^*(IG) + m^*(I\mathscr{C}G) \\ & = m^*I = |I| (G \text{ 可测 —— 按定义 } 3.4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad & m^*(IG) + m^*(I\mathscr{C}G) \\ & = m^*(IGE) + m^*(IG\mathscr{C}E) + m^*(I\mathscr{C}G \cdot E) \end{aligned}$$

$$+ m^*(I\cdot\mathscr{C}G\cdot\mathscr{C}E).$$

但 $$m^*(I\mathscr{C}G)\leqslant m^*(I\mathscr{C}G\cdot E)+m^*(I\mathscr{C}G\cdot\mathscr{C}E),$$

于是,由 $G\subseteq I$,有

$$mG=m^*(IG)\geqslant m^*(IGE)+m^*(IG\mathscr{C}E)$$
$$=m^*(GE)+m^*(G\mathscr{C}E)(\because G\subseteq I).$$

故 $$m^*A+\varepsilon>mG\geqslant m^*(GE)+m^*(G\mathscr{C}E)$$
$$\geqslant m^*(AE)+m^*(A\mathscr{C}E)\ (\because A\subseteq G).$$

由 ε 的任意性知

$$m^*A\geqslant m^*(AE)+m^*(A\mathscr{C}G).\qquad (**)$$

综合(*)、(**),引理得证.

下证原题(1)⟹(2). 因 E 有界,可取开区间 $I\supseteq E$,显然 $E\cdot\mathscr{C}I=\varnothing$. 设 T 为任一点集,则

$$m^*(T\mathscr{C}I)\geqslant m^*(T\mathscr{C}I\mathscr{C}E)$$
$$=m^*(TE\mathscr{C}I)+m^*(T\mathscr{C}E\mathscr{C}I)$$
$$=0+m^*(T\mathscr{C}E\mathscr{C}I).$$

而由引理,且 $TI\subseteq I$ 可得

$$m^*(TI)=m^*(TIE)+m^*(T\mathscr{C}E\cdot I).$$

故,由 I 的可测性,将上述二式相加,得

$$m^*T=m^*(TI)+m^*(T\mathscr{C}I)$$
$$\geqslant m^*(TE)+m^*(T\mathscr{C}E).$$

另外,$m^*T\leqslant m^*(TE)+m^*(T\mathscr{C}E)$ 是显然的,故

$$m^*T=m^*(TE)+m^*(T\mathscr{C}E)$$

即 E 为可测集(满足(2)).

另证(1)⟹(2) 只需对∀ 有界集 $T\subseteq\mathbb{R}^n$ 证得

$$m^*T\geqslant m^*(TE)+m^*(T\mathscr{C}E).$$

事实上,∀ $\varepsilon>0$,∃ 开集 $G\supseteq T$,使

$$m^*T>mG-\varepsilon.$$

由设,若 E 有界,且 $m^*E=m_*E$,而 $GE,G\mathscr{C}E$ 亦有界可测(定义 3.3(2)),且满足

$$m^*(GE)=m_*(GE),$$

$$m^*(G\mathscr{C}E)=m_*(G\mathscr{C}E).$$

这时 $GE\supseteq TE, G\mathscr{C}E\supseteq T\mathscr{C}E$,

于是
$$\begin{aligned}&m^*(TE)+m^*(T\mathscr{C}E)\\ \leqslant\ & m^*(GE)+m^*(G\mathscr{C}E)\\ =\ & m_*(GE)+m_*(G\mathscr{C}E)\\ \leqslant\ & m_*[(GE)\cup(G\mathscr{C}E)]\\ =\ & m_*G=mG<m^*T+\varepsilon.\end{aligned}$$

故　由 ε 的任意性即得.

[3.26]　点集 E 可测的充要条件是:$\forall\ A\subseteq E, B\subseteq\mathscr{C}E$,有
$$m^*(A+B)=m^*A+m^*B.$$

证　先证必要性.设$\forall\ T$ 有:
$$m^*T=m^*(TE)+m^*(T\mathscr{C}E).$$

令 $T=A+B$,则由 $A\subseteq E, B\subseteq\mathscr{C}E$ 知
$$AB=\varnothing,\ A\mathscr{C}E=\varnothing,\ BE=\varnothing.$$

$$\therefore\qquad TE=A,\ T\mathscr{C}E=B.$$

故
$$\begin{aligned}m^*(A+B)&=m^*T=m^*(TE)+m^*(T\mathscr{C}E)\\&=m^*A+m^*B.\end{aligned}$$

次证充分性.设$\forall\ A\subseteq E, B\subseteq\mathscr{C}E$,有
$$m^*(A+B)=m^*A+m^*B,$$

由于$\forall\ T, T\cap E\subseteq E, T\mathscr{C}E\subseteq\mathscr{C}E$,且
$$T=(TE)+(T\mathscr{C}E),$$

故
$$\begin{aligned}m^*T&=m^*[(TE)+(T\mathscr{C}E)]\\&=m^*(TE)+m^*(T\mathscr{C}E).\end{aligned}$$

即 E 可测.

[3.27]　设 $E(\subseteq\mathrm{R}^n)$有界,则

(1) E 可测$\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 闭集 $F\subseteq E$,使
$$m^*(E-F)<\varepsilon.$$

(2) E 可测$\Longleftrightarrow\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 开集 $G\supseteq E$,使

$$m^*(G-E)<\varepsilon.$$

证 (1) 若 E 可测,即 $mE=m^*E=m_*E$,而

$$m_*E=\sup\{mF\mid F\subseteq E, F\text{ 为闭集}\},$$

所以由上确界定义知,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 闭集 $F\subseteq E$,使

$$m^*F=mF>m_*E-\varepsilon=m^*E-\varepsilon.$$

即

$$m^*E-m^*F<\varepsilon.$$

故由 E 及 F 可测及 $F\subseteq E$ 知

$$\begin{aligned}m^*(E-F)&=m(E-F)=mE-mF\\&=m^*E-m^*F<\varepsilon.\end{aligned}$$

反之,若 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 闭集 $F\subseteq E$,有

$$m^*(E-F)<\varepsilon.$$

由于

$$E=(E-F)+F,\ (E-F)F=\varnothing,$$

根据外测度的次可加性

$$\begin{aligned}m^*E&\leqslant m^*(E-F)+m^*F\\&<\varepsilon+m^*F=\varepsilon+mF\\&=\varepsilon+m_*F\leqslant\varepsilon+m_*E,\end{aligned}$$

即

$$0\leqslant m^*E-m_*E<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得

$$m^*E=m_*E.$$

故 E 可测.

(2) 先证必要性. 设 E 可测,即

$$m^*E=m_*E,$$

但

$$m^*E=\inf\{mG\mid E\subseteq G, G\text{ 为开集}\},$$

所以由下确界定义,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 开集 $G\supseteq E$,使

$$mG<m^*E+\varepsilon.$$

故

$$\begin{aligned}m^*(G-E)&=m(G-E)=mG-mE\\&=mG-m^*E<\varepsilon.\end{aligned}$$

次证充分性. 设$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 开集$G\supseteq E$,使

$$m^*(G-E)<\varepsilon,$$

于是对$\varepsilon_n>0$,$\varepsilon_n\to 0$ 且 $\varepsilon_n>\varepsilon_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,$\exists\ G_n\supseteq E(n=1,2,\cdots)$,使

$$m^*(G_n-E)<\varepsilon_n.$$

令
$$G=\prod_{n=1}^{\infty}G_n,$$

则
$$E\subseteq G\subseteq G_n(n=1,2,\cdots).$$

故
$$G-E\subseteq G_n-E(n=1,2,\cdots).$$

所以

$$0\leqslant m^*(G-E)\leqslant m^*(G_n-E)<\varepsilon_n\to 0(n\to\infty).$$

于是,$m^*(G-E)=0$,即$G-E$是零测集. 而

$$E\subseteq G,$$

因此
$$E=G-(G-E)$$

为可测集之差,则E可测.

注 定理3.4(2)是本题的推论.

[**3.28**] 试证,有界集$E(\subseteq\mathrm{R}^n)$可测的充要条件是,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 开集$G\supseteq E$及闭集$F\subseteq E$,使

$$m(G-F)<\varepsilon.$$

证 必要性 设E可测,即有$m^*E=m_*E$,由m^*及m_*的等价条件,有

$$\inf\{mG\mid E\subseteq G,G\text{ 开集}\}=\sup\{mF\mid E\supseteq F,F\text{ 闭集}\}.$$

由上、下确界的定义知,$\forall\ \varepsilon>0$,

$\exists$ 开集$G\supseteq E$,使$mG<m^*E+\varepsilon/2$,

$\exists$ 闭集$F\subseteq E$,使$mF>m_*E-\varepsilon/2$.

从而$F\subseteq E\subseteq G$,且

$$mG-mF<(m^*E+\varepsilon/2)-(m_*E-\varepsilon/2)=\varepsilon.$$

(因为E可测,所以$m^*E=m_*E=mE$)

而
$$m(G-F)=mG-mF(\text{因 }F\subset G),$$

$$\therefore\quad m(G-F)<\varepsilon.$$

充分性　设$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 开集$G\supseteq E$及闭集$F\subseteq E$,使

$$m(G-F)<\varepsilon.$$

由于$G\supseteq F$,从而

$$mG-mF<\varepsilon.$$

又因

$$m^*E=\inf\{mG\,|\,E\subseteq G,G\text{ 为开集}\}$$
$$m_*E=\sup\{mF\,|\,F\subseteq E,F\text{ 为闭集}\}$$

于是由上下确界的意义知

$$mF\leqslant m_*E\leqslant m^*E\leqslant mG.$$
$$0\leqslant m^*E-m_*E\leqslant mG-mF<\varepsilon.$$

由ε的任意性,有

$$m^*E=m_*E.$$

即E可测.

[3.29]　$E(\subseteq\mathbf{R}^n)$可测的充要条件是:$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 开集$G_1\supseteq E$及$G_2\supseteq\mathscr{C}E$,使

$$m(G_1\cap G_2)<\varepsilon.$$

证　因G_2为开集,则$F=\mathscr{C}G_2$为闭集;而由$G_2\supseteq\mathscr{C}E$知

$$F=\mathscr{C}G_2\subseteq\mathscr{C}(\mathscr{C}E)=E.$$

而

$$G_1\cap G_2=G_1-\mathscr{C}G_2=G_1-F.$$

故本题实为:E可测的充要条件是:$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 开集$G_1\supseteq E$及闭集$F=\mathscr{C}G_2\subset E$,使

$$m(G_1-F)<\varepsilon.$$

这即为上一题不同的表述.我们现采用另一证法证明此结论.

充分性.设$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 开集$G\supseteq E$及闭集$F\subseteq E$,使

$$m(G-F)<\varepsilon.$$

取$\varepsilon_n=1/n>0(n=1,2,\cdots)$,则$\exists$ 开集$G_n\supseteq E$及闭集$F_n\subseteq E$,使

$$m(G_n-F_n)<1/n\ (n=1,2,\cdots).$$

令 $$F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n,\ G = \prod_{n=1}^{\infty} G_n.$$
则 F、G 均可测，且
$$F_n \subseteq F \subseteq E \subseteq G \subseteq G_n.$$
∴ $$G - E \subseteq G_n - F_n (n = 1, 2, \cdots).$$
因此 $m^*(G-E) \leqslant m^*(G_n - F_n) < 1/n$.

令 $n \to \infty$ 得
$$m^*(G - E) = 0,$$
即 $G-E$ 可测.

故 $E = G - (G-E)$ 可测.

必要性. 设 E 可测(不一定有界)，

令 $I_k = \{P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid |x_i| < k,\ i = 1, 2, \cdots, n\}$,

$E_k = E \cap I_k$,

则 $$\mathrm{R}^n = \sum_{k=1}^{\infty} I_k,\ E = E \cap \mathrm{R}^n = \sum_{k=1}^{\infty} E \cap I_k = \sum_{k=1}^{\infty} E_k.$$

因为 E 可测，而 I_k 为有界开方体，所以，E_k 为有界可测集. 于是∃ 开集 $G_k \supseteq E_k$

使 $$m(G_k - E_k) = mG_k - mE_k < \varepsilon/2^{k+1}.$$

令 $G = \sum_{k=1}^{\infty} G_k$，则 G 为开集，且 $E \subseteq G$. 于是有
$$m(G - E) = m\Big(\sum_{k=1}^{\infty} G_k - \sum_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \leqslant m\Big(\sum_{k=1}^{\infty} (G_k - E_k)\Big)$$
$$\left[\because\ \sum G_k - \sum E_k \subseteq \sum (G_k - E_k)\right]$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k - E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 E 可测知 $\mathscr{C}E$ 亦可测，故存在开集 $G_0 \supseteq \mathscr{C}E$，使
$$m(G_0 - \mathscr{C}E) < \varepsilon/2.$$

令 $F = \mathscr{C}G_0$，则 F 为闭集，且
$$F \subseteq \mathscr{C}(\mathscr{C}E) = E,$$

$$E - F = E - \mathscr{C}G_0 = E \cap \mathscr{C}(\mathscr{C}G_0)$$
$$= E \cap G_0 = G_0 - \mathscr{C}E.$$

$\therefore\quad m(E-F)=m(G_0-\mathscr{C}E)<\varepsilon/2.$

综合上述过程，我们已作出开集 G、闭集 F，使

$$F \subseteq E \subseteq G,$$

且
$$m(G - F) = m[(G - E) \cup (E - F)]$$
$$\leqslant m(G - E) + m(E - F)$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

即
$$m(G \cap \mathscr{C}F) < \varepsilon.$$

[3.30] 试证，当 E 为有界集时，有

(1) E 可测 $\Longleftrightarrow \exists$ F_σ 型集 $A \subseteq E$，使

$$m^*(E - A) = 0.$$

(2) E 可测 $\Longleftrightarrow \exists$ G_δ 型集 $B \supseteq E$，使

$$m^*(B - E) = 0.$$

证 (1) "$\Leftarrow$"：设 $m^*(E-A)=0$，其中 $A(\subseteq E)$ 为 F_σ 型集，从而 A 可测.

由于
$$0 \leqslant m_*(E - A) \leqslant m^*(E - A) = 0,$$

因此
$$m^*(E - A) = m_*(E - A)(= 0).$$

即 $E-A$ 可测，故 $E=A\cup(E-A)$ 可测.

"$\Rightarrow$"：由 F_σ 型集的构造知，关键是要找出一串闭集 $F_n(n=1, 2,\cdots)$，使

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq E，且\ m^*(E - A) = 0.$$

设 E 可测，则由于

$$mE = \sup\{mF \mid F \subseteq E, F\ 为闭集\}(= m_* E),$$

所以由上确界定义，对 $\varepsilon_n=1/n>0(n=1,2,\cdots)$，$\exists$ 闭集 $F_n\subseteq E$，使

$$m(E - F_n) = mE - mF_n < \frac{1}{n}.$$

不妨设 $F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq F_n\subseteq\cdots$（否则可用 $\sum_{i=1}^{n} F_i$ 代替 F_n）.

从而
$$E - F_1 \supseteq E - F_2 \supseteq \cdots$$
因此
$$m\Big(\prod_{n=1}^{\infty}(E - F_n)\Big) = \lim_{n\to\infty} m(E - F_n) \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$
令
$$A = \sum_{n=1}^{\infty} F_n,$$
则 A 是 F_σ 型集，$A\subseteq E$（$\because F_n\subseteq E, n=1,2,\cdots$），

而
$$E - A = E - \sum_{n=1}^{\infty}F_n = E\cap\Big(\mathscr{C}\sum_{n=1}^{\infty}F_n\Big)$$
$$= E\cap\Big(\prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{C}F_n\Big) = \prod_{n=1}^{\infty}(E\mathscr{C}F_n)$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}(E - F_n).$$
故有
$$m(E - A) = m\Big(\prod_{n=1}^{\infty}(E - F_n)\Big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} m(E - F_n) = 0.$$
即 $\quad m^*(E-A)=0.$

再证(2) 证明过程与(1)类似，简述如下：

注意 $E=B-(B-E)$ 及 G_δ 型集 B 可测，$B-E$ 为零测集，立即可得 E 可测. 下证必要性.

设 E 可测，则∃ 开集 $G_n\supseteq E$，使
$$m(G_n - E) < 1/n.$$
不妨设 $G_n\supseteq G_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则
$$G_1 - E \supseteq G_2 - E \supseteq \cdots$$
所以有
$$m\Big(\prod_{n=1}^{\infty}(G_n - E)\Big) = \lim_{n\to\infty} m(G_n - E) = 0.$$
令
$$B = \prod_{n=1}^{\infty}G_n,$$
则 B 是 G_δ 型集，且 $B\supseteq E$（$\because G_n\supseteq E, n=1,2,\cdots$）

而 $$B - E = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) - E = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \cap \mathscr{C}E$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n \cap \mathscr{C}E) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n - E).$$

故 $$m(B - E) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n - E)\right) = 0.$$

即 $m^*(B-E)=0$.

三、(外)测度的若干补充性质

[3.31] 试证：

(1) 若 E_1 可测，E_2 为任意点集，则
$$m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_1 \cap E_2) = mE_1 + m^*E_2.$$

(2) 若 E_1、E_2 都可测，则
$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = mE_1 + mE_2.$$

证 (1) 若 $mE_1=+\infty$ 或 $m^*E_2=+\infty$，则结论显然.

若 $mE_1<\infty$ 且 $m^*E_2<\infty$，则由 E_1 可测，先取 $T=E_1\cup E_2$，有
$$m^*(T) = m^*(TE_1) + m^*(T\mathscr{C}E_1),$$

即
$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*[(E_1 \cup E_2)E_1] + m^*[(E_1 \cup E_2)\mathscr{C}E_1]$$
$$= m^*E_1 + m^*(E_2\mathscr{C}E_1).$$

再取 $T=E_2$，有
$$m^*E_2 = m^*(E_2 \cap E_1) + m^*(E_2\mathscr{C}E_1).$$

两式相减，且将 $mE_1=m^*E_1$ 代入得
$$m^*(E_1 \cup E_2) - m^*E_2 = mE_1 - m^*(E_1 \cap E_2)$$

移项即得(1).

(2) 由 E_1、E_2 都可测得 $E_1\cup E_2$ 与 $E_1\cap E_2$ 也可测，于是由(1)的证明可知，
$$m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_1 \cap E_2) = mE_1 + m^*E_2.$$

再由各集的可测性，可将此式各处的“m^*”改为“m”而得(2).

特别，当 E_1，E_2 为互不相交的可测集时，有
$$m(E_1 \cap E_2) = m\varnothing = 0.$$

故 $$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2.$$

注 本题结论(2)是常用的.

[**3.32**] 试证,若 E_1、E_2 为任意二点集,且其中之一的外测度有限,则有

$$m^*(E_1 - E_2) \geqslant m^*E_1 - m^*E_2.$$

证 因为 $E_1 \subseteq (E_1 - E_2) \cup E_2$,

所以 $$m^*E_1 \leqslant m^*(E_1 - E_2) + m^*E_2.$$

因 $m^*E_1 < \infty$ 或 $m^*E_2 < \infty$,所以可移项相减得:

$$m^*(E_1 - E_2) \geqslant m^*E_1 - m^*E_2.$$

[**3.33**] 试证,设 A、B 为 R^n 中外测度有限的二集合,则有

$$|m^*A - m^*B| \leqslant m^*(A \triangle B).$$

其中,$(A \triangle B) = (A - B) \cup (B - A)$ 称为 A 与 B 的对称差.

证 因

$$A \subseteq A \cup B = (A \triangle B)) \cup (A \cap B) \subseteq (A \triangle B) \cup B,$$

所以 $$m^*A \leqslant m^*(A \triangle B) + m^*B.$$

即 $$m^*A - m^*B \leqslant m^*(A \triangle B).$$

同理可得 $$m^*B - m^*A \leqslant m^*(A \triangle B).$$

于是 $$-m^*(A \triangle B) \leqslant m^*A - m^*B \leqslant m^*(A \triangle B).$$

故 $$|m^*A - m^*B| \leqslant m^*(A \triangle B).$$

[**3.34**] 若 A、B、$C \subseteq \mathrm{R}^n$,且

$$m^*(A \triangle B) = m^*(B \triangle C) = 0,$$

则有 $$m^*(A \triangle C) = 0.$$

证 若能证得

$$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \qquad (*)$$

则有 $$0 \leqslant m^*(A \triangle C) \leqslant m^*(A \triangle B) + m^*(B \triangle C) = 0.$$

即 $$m^*(A \triangle C) = 0.$$

所以下面只证(*)式.事实上,我们有

$$\begin{aligned} A \triangle C = & [A - (B \cup C)] \cup [A \cap B - ABC] \\ & \cup [C - (A \cup B)] \cup [BC - ABC] \end{aligned}$$

$$A\triangle B=[A-(B\cup C)]\cup[AC-ABC]$$
$$\cup[B-(A\cup C)]\cup[BC-ABC]$$
$$B\triangle C=[B-(A\cup C)]\cup[AB-ABC]$$
$$\cup[C-(A\cup B)]\cup[AC-ABC]$$

显然,(*)式成立.

[3.35] 若 $m^*(E_1-E_2)=m^*(E_2-E_1)=0$,则有

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cap E_2)=m^*E_1=m^*E_2.$$

证 因为 $E_1\cup E_2=(E_1\cap E_2)\cup(E_1-E_2)\cup(E_2-E_1)$ (1)

而

$$\left.\begin{array}{l}E_1\cap E_2\subseteq E_1\subseteq E_1\cup E_2\\ E_1\cap E_2\subseteq E_2\subseteq E_1\cup E_2\end{array}\right\}, \qquad (2)$$

由(1)得

$$m^*(E_1\cup E_2)$$
$$\leqslant m^*(E_1\cap E_2)+m^*(E_1-E_2)+m^*(E_2-E_1)$$
$$=m^*(E_1\cap E_2).$$

由(2)得

$$\begin{cases}m^*(E_1\cap E_2)\leqslant m^*E_1\leqslant m^*(E_1\cup E_2),\\ m^*(E_1\cap E_2)\leqslant m^*E_2\leqslant m^*(E_1\cup E_2).\end{cases}$$

于是有

$$m^*(E_1\cap E_2)\leqslant m^*E_1\leqslant m^*(E_1\cup E_2)\leqslant m^*(E_1\cap E_2),$$
$$m^*(E_1\cap E_2)\leqslant m^*E_2\leqslant m^*(E_1\cup E_2)\leqslant m^*(E_1\cap E_2).$$

故

$$m^*(E_1\cup E_2)=m^*(E_1\cap E_2)=m^*E_1=m^*E_2.$$

注 同样方法可证,若 $m(E_1-E_2)=m(E_2-E_1)=0$,

则
$$m(E_1\cup E_2)=m(E_1\cap E_2)=mE_1=mE_2.$$

[3.36] 设 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是一些互不相交的可测集,且 $E_i\subseteq S_i(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$m^*\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*E_i.$$

证法一 因 S_i 可测$(i=1,2,\cdots,n)$,且 $S_i\cap S_j=\varnothing(i\neq j)$,所以由定理 3.3(5),对于

$$T = \sum_{i=1}^{n} E_i,$$

显然有 $\quad TS_i = E_i, T \cap \left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (TS_i) = \sum_{i=1}^{n} E_i.$

故有

$$\begin{aligned} & m^*\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \\ & = m^*\left[T \cap \left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right)\right] \\ & = \sum_{i=1}^{n} m^*(TS_i) \\ & = \sum_{i=1}^{n} m^* E_i. \end{aligned}$$

证法二 由外测度性质有

$$m^*\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m^* E_i \tag{1}$$

另一方面，令

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n,$$

则任意开集 $G \supseteq E$，由于

$$G \supseteq GS_i (i = 1, 2, \cdots, n),$$

因此 $$G \supseteq \sum_{i=1}^{n} (GS_i)$$

由 S_i 可测可知 GS_i 可测，由 S_i 互不相交可知 GS_i 互不相交，又

$$E_i \subseteq E \subseteq G,\ E_i \subseteq S_i,$$

从而 $$E_i \subseteq GS_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

于是 $$m(GS_i) = m^*(GS_i) \geqslant m^* E_i.$$

因此

$$mG \geqslant m\left(\sum_{i=1}^{n} GS_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(GS_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m^* E_i.$$

由 $G(\supseteq E)$ 的任意性及外测度定义，有

$$m^*\left(\sum_{i=1}^{n}E_i\right)=m^*E=\inf\{mG\mid E\subseteq G, G\text{ 开集}\}$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{n}m^*E_i. \tag{2}$$

综合(1)、(2),命题得证.

[3.37] 设 $E_1\subseteq E_2\subseteq\cdots\subseteq E_n\subseteq\cdots$,且 $E=E_1+E_2+\cdots$ 为有界集,则有

$$m^*\left(\sum_{i=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}m^*E_n.$$

证 因为 $E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$,而 $E_1\subseteq E_2\subseteq\cdots$,所以

$$E=\lim_{n\to\infty}E_n,\text{且 } E_n\subseteq E\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是

$$m^*E_n\leqslant m^*E.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}m^*E_n\leqslant m^*E=m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right). \tag{1}$$

另一方面,由于

$$m^*E_n=\inf\{mG\mid E_n\subseteq G, G\text{ 为开集}\},$$

由下确界定义,$\forall\ \varepsilon>0$ 及每一 n,$\exists$ 开集 $G_n\supseteq E_n$ 使

$$mG_n<m^*E_n+\varepsilon.$$

令 $P_k=\prod_{n=k}^{\infty}G_n$,则 $P_k\subseteq G_k$;P_k、G_k 均可测.

于是 $mP_k\leqslant mG_k<m^*E_k+\varepsilon\ (k=1,2,\cdots,n,\cdots)$.

即有

$$\lim_{k\to\infty}mP_k\leqslant\lim_{k\to\infty}m^*E_k+\varepsilon.$$

而

$$G_n\supseteq E_k(n\geqslant k),\ P_k\supseteq E_k,$$

因此有

$$\sum_{k=1}^{\infty}P_k\supseteq\sum_{k=1}^{\infty}E_k=E.$$

显然

$$P_1\subseteq P_2\subseteq\cdots\subseteq P_n\subseteq\cdots$$

由定理 3.3(5)可知

$$m^*E = m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant m\left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} mP_n \leqslant \lim_{n\to\infty} m^*E_n. \qquad (2)$$

故由(1)、(2)得

$$m^*E = m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m^*E_n.$$

[3.38] 设 $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_n \supseteq \cdots$，且 E_1 有界，则

$$m_*\left(\prod_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m_*E_n.$$

证 令 $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} E_n.$

已知 E_1 有界，因此可取开长方体 $I \supseteq E_1$，从而 $\{I - E_n\}$ 是递增集列：

$$I - E_1 \subseteq I - E_2 \subseteq \cdots,$$

但

$$I - E = I - \prod_{n=1}^{\infty} E_n = I\,\mathscr{C}\left(\prod_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

$$= I \cap \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}E_n = \sum_{n=1}^{\infty} (I \cap \mathscr{C}E_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (I - E_n) = \lim_{n\to\infty} (I - E_n),$$

故由上题结论有

$$m^*\left(I - \lim_{n\to\infty} E_n\right) = m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} (I - E_n)\right) = \lim_{n\to\infty} m^*(I - E_n).$$

又因 $$E \subseteq E_1 \subseteq I.$$

所以

$$m_*E = mI - m^*(I - E)$$

$$= mI - m^*\left(I - \lim_{n\to\infty} E_n\right)$$

$$= mI - \lim_{n\to\infty} m^*(I - E_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} [mI - m^*(I - E_n)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} m_*E_n.$$

即

$$m_*\left(\prod_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}m_*E_n.$$

[3.39] 试证：

(1)若 $mE=1$，A、$B\subseteq E$；A、B 都可测，且 $mA+mB>1$，

则
$$m(AB)>0.$$

(2)若 $mE=1$，而 E_1、E_2、…、E_n 是 E 的 n 个可测子集，且

$$mE_1+mE_2+\cdots+mE_n>n-1,$$

则
$$m\left(\prod_{i=1}^{n}E_i\right)>0.$$

证 (1) ∵ A、B 可测，∴ $A+B$，AB 都可测. 由 A、$B\subseteq E$ 得

$$A+B\subseteq E,$$

所以
$$m(A+B)\leqslant mE=1.$$

再由题[3.31](2)中给出的公式，得

$$\begin{aligned}m(AB)&=mA+mB-m(A+B)\\&>1-m(A+B)\\&\geqslant 1-mE=0.\end{aligned}$$

另证 ∵
$$\begin{aligned}AB&=E(AB)=E\mathscr{C}_E(\mathscr{C}_EA+\mathscr{C}_EB),\\&=E-(\mathscr{C}_EA+\mathscr{C}_EB),\end{aligned}$$

其中

$$\mathscr{C}_EA=E-A,\quad \mathscr{C}_EB=E-B,$$
$$\mathscr{C}_EA+\mathscr{C}_EB\subseteq E.$$

∴
$$\begin{aligned}m(AB)&=m(E-(\mathscr{C}_EA+\mathscr{C}_EB))\\&=1-m(\mathscr{C}_EA+\mathscr{C}_EB)\\&\geqslant 1-[m(E-A)+m(E-B)]\\&=1-[2mE-mA-mB]\\&=mA+mB-1>0.\end{aligned}$$

(2) 将上面的后一证法加以推广便得(2)的证明，具体过程如下：

因为对可测集交的测度运算不及对可测集并的测度运算方

便，故考虑：

$$\prod_{i=1}^{n} E_i = E \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} E_i \right) = E \mathscr{C}_E \left(\mathscr{C}_E \left(\prod_{i=1}^{\infty} E_i \right) \right)$$

$$= E - \left(\sum_{i=1}^{n} \mathscr{C}_E E_i \right) = E - \sum_{i=1}^{n} (E - E_i).$$

于是

$$m\left(\prod_{i=1}^{n} E_i \right) = m\left[E - \sum_{i=1}^{n} (E - E_i) \right]$$

$$= mE - m\left(\sum_{i=1}^{n} (E - E_i) \right),$$

$$\left(\because \sum_{i=1}^{n} (E - E_i) \subseteq E \right).$$

$$\geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} m(E - E_i) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - mE_i)$$

$$= 1 - n + \sum_{i=1}^{n} mE_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} mE_i - (n - 1) > 0.$$

$$\left(\because \sum_{i=1}^{n} mE_i > n - 1 \right).$$

即

$$m\left(\prod_{i=1}^{n} E_i \right) > 0.$$

［3.40］ 设$\{E_k\}$是$[0,1]$中的可测集列，$mE_k = 1 (k = 1, 2, \cdots)$，试证：

$$m\left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k \right) = 1,\ m\left(\sum_{k=1}^{\infty} E_k \right) = 1.$$

证 记$S = [0,1]$，因$E_k \subseteq S$，所以

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq S,\ 且 \sum_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq S.$$

于是要证的后一等式由下列不等式立即得到

$$1 = mE_1 \leqslant m\left(\sum_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant mS = m[0,1] = 1.$$

再证前一等式. 由

$$\prod_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq S \text{ 得 } m\left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant mS = 1 \tag{1}$$

另一方面,我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq S = \left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k\right) + \left(\mathscr{C}_S\left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right)$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (S - E_k)\right).$$

所以

$$1 = m\left(\sum_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leqslant m\left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k\right) + \sum_{k=1}^{\infty} m(S - E_k)$$

$$= m\left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k\right) + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 1) = m\left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

即有

$$m\left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geqslant 1. \tag{2}$$

故由(1)、(2)得

$$m\left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1.$$

注 等式 $m\left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1$ 是对[0,1]中的可列无穷多个测度为1的集成立,若是[0,1]中不可列无穷多个测度为1的集组成的族,则结论不真. 举例如下:

设 $S = [0,1]$, $E_x = S - \{x\}(x \in S)$. 则显然 E_x 可测. $E_x \subseteq S$, 且 $mE_x = 1$. 但

$$\prod_{x \in S} E_x = \varnothing,$$

即有

$$m\left(\prod_{x \in S} E_x\right) = 0 \neq 1.$$

[3.41] 对于任一有界集 E(不一定可测), $\exists$ F_σ 型集 A 及 G_δ

型集 B，$A\subseteq E\subseteq B$，使

$$mA = m_*E,\ mB = m^*E.$$

证 由于$m_*E=\sup\{mF \mid F\subseteq E, F \text{ 为闭集}\}$，

$m^*E=\inf\{mG \mid E\subseteq G, G \text{ 为开集}\}$.

所以由上下确界的定义知，对 $\varepsilon_n=1/n>0$，$\exists$ 闭集 $F_n\subseteq E$ 及开集 $G_n\supseteq E$，使

$$mF_n > m_*E - 1/n,$$
$$mG_n < m^*E + 1/n.$$

令
$$A = \sum_{n=1}^{\infty}F_n,\ B = \prod_{n=1}^{\infty}G_n,$$

由 F_σ 型集及 G_δ 型集的概念知 A 是 F_σ 型集、B 是 G_δ 型集，且由 $F_n\subseteq E\subseteq G_n(n=1,2,\cdots)$知

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}F_n \subseteq E,\ B = \prod_{n=1}^{\infty}G_n \supseteq E.$$

故

$$m_*E \geqslant mA \geqslant mF_n > m_*E - 1/n\ (n=1,2,\cdots),$$
$$m^*E \leqslant mB \leqslant mG_n < m^*E + 1/n\ (n=1,2,\cdots).$$

令 $n\to\infty$即得

$$mA = m_*E,\ mB = m^*E.$$

[3.42] 设 $A\subseteq[0,1]$可测，$mA=1$，则对任意可测集 $B\subseteq[0,1]$，有

$$m(AB) = mB.$$

证 因 $A\subseteq[0,1]$，$B\subseteq[0,1]$，所以 $A\subseteq A+B\subseteq[0,1]$，于是 $1=mA\leqslant m(A+B)\leqslant m[0,1]=1$.

再由题[3.31](2)得

$$1= m(A + B) = mA + mB - m(AB)$$
$$= 1 + mB - m(AB).$$

故
$$mB-m(AB)=0.$$

即
$$m(AB) = mB.$$

[3.43] 设 G 是开集，E 是零测集，则有

$$\overline{G} = \overline{(G - E)}.$$

证　显然 $G-E \subseteq G$，则

$$\overline{G - E} \subseteq \overline{G} \tag{1}$$

另一方面，$\forall\ x \in \overline{G}$，则$\exists\ \{x_n\} \subseteq G(x_n \neq x)$，使 $x_n \to x(n \to \infty)$. 这里的 x_n 必是 G 的内点（因 G 是开集），所以$\exists$ 开区间$(\alpha_n, \beta_n) \subseteq G$，（$(\alpha_n, \beta_n)$为 G 的构成区间）使 $x_n \in (\alpha_n, \beta_n)$.

又由 $mE=0$，可知$\exists\ y_n \in (\alpha_n, \beta_n) - E$，且

$$|x_n - y_n| < 1/2^n.$$

事实上，若不然，则在$(x_n - 2^{-n}, x_n + 2^{-n})$内无$(\alpha_n, \beta_n) - E$ 的点，从而

$$(x_n - 2^{-n}, x_n + 2^{-n}) \subseteq E.$$

注意到非空开集的测度是大于零的，故

$$mE \geqslant m[(\alpha_n, \beta_n) \cap (x_n - 2^{-n}, x_n + 2^{-n})] > 0.$$

与 $mE=0$ 相矛盾（（*）式成立）.

由

$$|y_n - x| \leqslant |y_n - x_n| + |x_n - x| < 1/2^n + |x_n - x|$$

及 $x_n \to x(n \to \infty)$，可得

$$y_n \to x(n \to \infty)(y_n \in G - E).$$

这就说明 x 也是 $G-E$ 的聚点.

故　　$x \in \overline{(G - E)}$.

即　　$\overline{G} \subseteq (\overline{G - E})$. (2)

综合(1)、(2)得 $\overline{G} = (\overline{G - E})$.

四、可测性的判别及测度的求法

[3.44]　对于开方体 I 有

(1) $m^* I = |I|$.

(2) $m^* (\overline{I}) = |I|$.

(3)（此结论不需证明）由可测性便知

$$mI = m\overline{I} = |I|.$$

证　(1) 显然 $I \subseteq I + \varnothing + \varnothing + \cdots$（右边可看作一串开区间之并），所以有

$$m^* I \leqslant |I| + 0 + 0 + \cdots = |I|.$$

另一方面，设$\{I_n\}$是 I 的任一开覆盖，且

$$I \subseteq \sum_{n=1}^{\infty} I_n,$$

则
$$|I| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|.$$

从而

$$|I| \leqslant \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \,\Big|\, I \subseteq \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right\} = m^* I.$$

故
$$m^* I = |I|.$$

(2) 一方面，由于

$$m^* I = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \,\Big|\, I \subseteq \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right\} = |I|.$$

所以由下确界性质，$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists$ 开方体 $J \supseteq \overline{I}$，

使
$$|J| < |I| + \varepsilon.$$

于是
$$m^*(\overline{I}) \leqslant |J| < |I| + \varepsilon.$$

所以
$$m^*(\overline{I}) \leqslant |I|.$$

另一方面，设$\{I_n\}$是 $\overline{I}$ 的任一开覆盖，则因 $\overline{I}$ 是有界闭集，由有限覆盖定理，$\exists$ 自然数 N_0，使

$$I \subseteq \overline{I} \subseteq \sum_{i=1}^{N_0} I_{n_i}.$$

即有
$$|I| \leqslant \sum_{i=1}^{N_0} I_{n_i} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|.$$

故
$$|I| \leqslant \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \,\Big|\, \{I_n\} \text{ 是 } \overline{I} \text{ 的开覆盖} \right\} = m^*(\overline{I}).$$

因此

$$m^*(\overline{I}) = |I|.$$

[3.45] (1) 试作一闭集 $F \subseteq [0,1]$，使 F 中不含任何开区间，且 $mF = 1/2$.

(2) 作$[0,1]$的一个完备子集 E，使 E 不含任何开区间，且 mE

$=2/3$.

(3) 对任何正数 $\alpha, 0<\alpha<1$，能否作$[0,1]$的一个闭子集 E，使 $mE=\alpha$，且 E 内不含任何开区间.

解 (1) 仿照 Cantor 集的作法步骤完成 F 的构作.

第一步：在$[0,1]$的中央挖去长为 1/6 的开区间

$$(5/12,\ 7/12)=G_1;$$

第二步：在余下的两个闭区间$[0,\ 5/12]$和$[7/12,\ 1]$中分别挖去中央处的长为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}$的开区间，它们的并是

$$G_2=\left(\frac{13}{72},\frac{17}{72}\right)\cup\left(\frac{55}{72},\frac{59}{72}\right).$$

………………

第 n 步：在余下的 2^{n-1}个闭区间中，分别挖去其中央处长为$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{6}$的开区间，记这 2^{n-1}个互不相交的开区间之并为 G_n.

将这一手续无限进行下去，得一串开集

$$G_1,G_2,\cdots,G_n,\cdots,$$

令
$$G=\sum_{n=1}^{\infty}G_n,$$

则 G 为开集，且 $F=[0,1]-G$ 与 Cantor 集具有类似性质：

(i) F 为闭集，且为完备集；

(ii) F 中不含任何开区间(F 为疏朗集)；

(iii) F 可测，且由于

$$mG=\sum_{n=1}^{\infty}mG_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{6}}{1-2/3}=\frac{1}{2}.$$

故
$$mF=m[0,1]-mG=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(2) 与(1)完全相同的手续，第 n 次去掉的 2^{n-1}个开区间的长度为 $1/5^n$ 即可. 于是

$$mF = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{5^n} = 1 - \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3}.$$

(3) 与(1)完全相同的手续,第 n 次去掉的 2^{n-1}个开区间的长度应为

$$\frac{1-\alpha}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

所得开集 $G=\sum_{n=1}^{\infty} G_n$ 的测度为

$$mG = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1-\alpha}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1-\alpha.$$

于是 $E=[0,1]-G$ 是完备疏朗可测集,

且有 $$mE = 1 - mG = 1 - (1-\alpha) = \alpha.$$

注 (3)的作法,带有普遍意义,它可以作为公式应用.我们不妨称之为 Cantor 方法.

[**3.46**] 在[0,1]中作开集 G,使 $\overline{G}=[0,1]$,而

$$mG = 1/2.$$

解 在上题(1)中,我们已作出[0,1]中的闭集 F,$mF=1/2$,令 $G=[0,1]-F$,则 G 是开集,且

$$mG = 1/2.$$

下证 $\overline{G}=[0,1]$. 其实只需证$\forall\ x_0 \in F$,$\exists$ G 中的点列$\{x_n\}$以 x_0 为聚点.

首先,在 (x_0-1, x_0+1) 中显然含 G 的一个点 x_1,令$\varepsilon_1=\min\{1/2, |x_1|\}$,由于 F 不含任何区间,所以在$(x_0-\varepsilon_1, x_0+\varepsilon_1)$中必含 G 的一个点 x_2(显然 $x_2 \neq x_1$),……

令 $\varepsilon_n=\min\{1/n, |x_n|\}$,由于 F 不含任何区间,所以在$(x_0-\varepsilon_n, x_0+\varepsilon_n)$中必含 G 的一个点 x_{n+1}(显然 $x_{n+1} \neq x_i, i=1,2,\cdots,n$).……

这样的点列$\{x_n\}\subseteq G$,且

$$|x_n - x_0| < 1/n, \text{即 } x_n \to x_0 (n \to \infty).$$

故 x_0 是 G 的聚点，由 $x_0 \in F$ 的任意性知，F 中的点全是 G 的聚点，即 $F \subseteq G'$.

从而 $$\overline{G} = G \cup G' = [0,1].$$

[3.47] 在闭区间$[a,b]$上作出可数个两两不相交的完备的无处稠密集，使它们的测度之和为 $b-a$.

解 第一步，用题[3.45](3)所给的"Cantor 方法"，首先在$[a,b]$上作一个测度为$\frac{1}{2}(b-a)$的完备疏集 E_1.

第二步，设 E_1 的余开集 G_1（显然 $mG_1 = (b-a)/2$）的构成区间为（α_{1i}，β_{1i}），则在每（α_{1i}，β_{1i}）内作一个测度为（$\beta_{1i}-\alpha_{1i}$）/2 的完备疏集 E_{1i}，于是

$$m\left(\sum_{i=1}^{\infty} E_{1i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} mE_{1i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_{1i}-\alpha_{1i}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_{1i}-\alpha_{1i}) = \frac{1}{2}mG_1 = \frac{1}{2^2}(b-a).$$

记 $E_2 = \sum_{i=1}^{\infty} E_{1i}$，则 $E_2 \subseteq G_1$. 因此 $E_2E_1 = \varnothing$，且 E_1+E_2 为完备疏集.

然后，设 E_1+E_2 的余开集 G_2 的构成区间为(α_{2i},β_{2i})，则 $E_1+E_2+G_2=[a,b]$，E_1、E_2、G_2 互不相交，从而

$$m[a,b] = mE_1 + mE_2 + mG_2,$$

即有

$$mG_2 = (b-a) - \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{4}(b-a) = \frac{1}{4}(b-a).$$

同样在每个(α_{2i},β_{2i})内作一个测度为$(\beta_{2i}-\alpha_{2i})/2$ 的完备疏集 E_{2i}，记

$$E_3 = \sum_{i=1}^{\infty} E_{2i},$$

则

$$mE_3 = \sum_{i=1}^{\infty} mE_{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2}(\beta_{2i} - \alpha_{2i}) = \frac{1}{2} mG_2 = \frac{b-a}{2^3}$$

………………

将上述过程无限进行下去，得一列两两不交的完备疏集（由作法知）：

$$E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots,$$

其中 $$mE_n = (b-a)/2^n (n = 1, 2, \cdots).$$

令 $$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n,$$

则 E 为可数多个两两不相交的完备的无处稠密集之并，且

$$mE = m\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-a}{2^n} = b - a.$$

故 E 即为所求作之集.

[**3.48**] 作一个含在[0,1]中的可测集 E，使任意区间 $\Delta \subseteq [0,1]$，有

$$m(\Delta \cdot E) > 0,\ m(\Delta \cdot \mathscr{C}E) > 0.$$

解 (i) 先指出如下结论：若 (α, β) 为任一区间，而 $0 < r < 1$，则存在一个在 (α, β) 内稠密的开集 G，使

$$mG = r(\beta - \alpha) = rm(\alpha, \beta).$$

事实上，令 $\lambda = (1-r)(\beta - \alpha)$，则 $0 < \lambda < m[\alpha, \beta]$. 由题[3.45](3)所给的"Cantor"方法，可作一个完备疏集 $E \subseteq [\alpha, \beta]$，使 $mE = \lambda$，于是

$$G = [\alpha, \beta] - E \subseteq (\alpha, \beta),$$

G 是稠密开集，且有

$$\begin{aligned} mG &= \beta - \alpha - mE = \beta - \alpha - \lambda \\ &= (\beta - \alpha) - (1 - r)(\beta - \alpha) = r(\beta - \alpha) \\ &= rm(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

(ii) 在 [0,1] 中构造符合要求的可测集 E：对于区间 [0,1]，让 $r_1 = 1 - 1/2^2$，由(i)可作一稠密开集 G_1，使

$$mG_1 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) m(0,1) = 1 - 1/2^2.$$

对 G_1 的每个构成区间(α_{1k},β_{1k})，又如上法可作稠密开集 $G_{1k}\subseteq(\alpha_{1k},\beta_{1k})$，使

$$mG_{1k}=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)m(\alpha_{1k},\beta_{1k})=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)(\beta_{1k}-\alpha_{1k}).$$

记 $G_2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}G_{1k}$，则有 $G_1\supseteq G_2$，且

$$mG_2=\sum_{k=1}^{\infty}mG_{1k}=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_{1k}-\alpha_{1k})$$
$$=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)$$

继续这一过程，对 G_n 的每个构成区间(α_{nk},β_{nk})，在其中作稠密开集 G_{nk}，使

$$mG_{nk}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)(\beta_{nk}-\alpha_{nk}).$$

记 $G_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}G_{nk}$，则 $G_n\supseteq G_{n+1}$，且

$$mG_{n+1}=\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]mG_n=\prod_{i=1}^{n}\left[1-\frac{1}{(i+1)^2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}$$

……………………

于是得到一列在[0,1]中稠密的递减开集：

$$G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\supseteq G_n\supseteq\cdots$$

令 $E=\prod\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，则 E 可测，且

$$mE=\lim_{n\to\infty}mG_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n-1}\left[1-\frac{1}{(i+1)^2}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

(iii) 证明 E 满足题目要求．由(ii)知

$$E=\prod_{n=1}^{\infty}G_n,\text{且 } mE=\frac{1}{2}.$$

任取开区间 $\Delta\subseteq[0,1]$，由 G_n 于$[0,1]$中稠密知，$\Delta\cap E\neq\varnothing$. 设 $x_0\in\Delta\cap E$，则每一 G_n 均有一构成区间(α_{nk},β_{nk})，使

$$x_0 \in (\alpha_{nk},\beta_{nk}),\text{且 } m(\alpha_{nk},\beta_{nk}) < \frac{1}{3^{n+1}} \to 0\ (n\to\infty).$$

$\therefore\ \exists\ n_0$，使 $x_0\in(\alpha_{n_0k},\beta_{n_0k})\subseteq\Delta$.

由

$$(\alpha_{n_0k},\beta_{n_0k})\cap E = (\alpha_{n_0k},\beta_{n_0k})\cap\prod_{i=n_0}^{\infty}G_i,$$

有

$$m\left[(\alpha_{n_0k},\beta_{n_0k})\cap E\right] = (\beta_{n_0k}-\alpha_{n_0k})\prod_{i=n_0}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(i+1)^2}\right].$$

又

$$1 > \prod_{i=n_0}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(i+1)^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n_0-1}\left(1-\frac{1}{(i+1)^2}\right)\right]^{-1} > 0.$$

因此
$$m[(\alpha_{n_0k},\beta_{n_0k})\cap E] > 0,$$
$$m[(\alpha_{n_0k},\beta_{n_0k})\cap \mathscr{C}E] > 0.$$

故
$$m(\Delta\cap E)\geqslant m[(\alpha_{n_0k},\beta_{n_0k})\cap E] > 0,$$
$$m(\Delta\cap \mathscr{C}E)\geqslant m[(\alpha_{n_0k},\beta_{n_0k})\cap \mathscr{C}E] > 0.$$

[3.49] 设 A_1、$A_2\subseteq\mathbf{R}^n$，$A_1\subseteq A_2$，A_1 可测，且 $mA_1=m^*A_2$，则 A_2 为可测集.

证 由 $A_1\subseteq A_2$ 得 $A_2=A_1\cup(A_2-A_1)$，而 A_1 可测，所以只需证 A_2-A_1 为可测集.

$\forall\ \varepsilon>0$，由于

$$m^*A_2 = \inf\{mG\mid A\subseteq G, G\text{ 为开集}\},$$

由下确界定义，$\exists$ 开集 $G\supseteq A_2(\supseteq A_1)$，使

$$mG < m^*A_2+\varepsilon = mA_1+\varepsilon.$$

再由 G、A_1 可测及 $A_2-A_1\subseteq G-A_1$ 得

$$\begin{aligned}0&\leqslant m^*(A_2-A_1)\\&\leqslant m^*(G-A_1)=m(G-A_1)=mG-mA_1<\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知 $m^*(A_2-A_1)=0$.

故 A_2-A_1 为可测集(零测集). 即有 A_2 可测,且

$$mA_2 = mA_1 + m(A_2 - A_1) = mA_1.$$

[3.50] 设在[0,1]中作点集:

$E=\{x \mid 在\ x\ 的十进位制小数表示中只出现\ 9\ 个数码\}$.

试问 E 的测度与基数是多少?

解 不妨设在 x 的十进位制小数表示中不出现数字"1"(我们约定采用 $0.1=0.0999\cdots$, $0.31=0.30999\cdots\cdots$ 等表示),于是可仿照"Cantor 方法"作一开集 G,

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n.$$

其中,$G_1=(0.1,0.2)$ 是将[0,1]分成十等分所得的第二个开区间,显然 G_1 中任一数其小数点后第一位数字是"1";将[0,1]十等分并去掉 G_1 后所余下的 9 个区间分别再十等分,各自的第二个开区间之并记为 G_2,G_2 中任一数,其小数点后第二位数字是"1";$\cdots$,将余的 9^{n-1} 个区间每个进行十等分,取各自的第二个开区间,它们的并记为 G_n,则 G_n 中任一数,其小数点后第 n 位数字是"1";$\cdots$.

令 $E=[0,1]-G$,由 G 的作法知,E 中任一数,其小数点后任一位数字都不是"1". 与 Cantor 集的性质完全类似地,我们有

(i) E 是完备集,且具有连续统的势 c.

(ii) E 是疏集(不含任何区间).

(iii) E 可测,且 $mE=0$. 事实上有

$$\begin{aligned} mE &= 1 - mG \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} mG_1 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n-1}}{10^n} \\ &= 1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

[3.51] 以 Cantor 集的每一点为中心，画长为(0,1)的开区间，试求一切这种区间的并集之测度.

解 记这个集合为 E，则由 Cantor 集的构造可知(如图)

$$E=\left(-\frac{1}{20},\frac{1}{9}+\frac{1}{20}\right)\cup\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{20},\frac{1}{3}+\frac{1}{20}\right)$$
$$\cup\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{20},\frac{7}{9}+\frac{1}{20}\right)\cup\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{20},1+\frac{1}{20}\right)$$

∴ $$mE=4\times\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{20}\right)=\frac{38}{45}$$

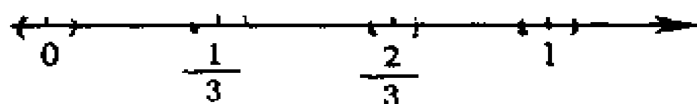


图 3—2

[3.52] 用(a_1,b_1)、(a_2,b_2)、…、(a_n,b_n)、…表示闭区间[0,1]上测度为 0.6 的完备疏集 E 的邻接区间($\inf E=0,\sup E=1$)，以每一点 a_i,b_i 为中心画长为$\frac{1}{4}(b_i-a_i)$的开区间 u_i、v_i，记集

$$G=\left(\sum u_i\right)\cup\left(\sum v_i\right).$$

试估计 G 的测度，并回答 G 是否覆盖 E?

解 依题意

$$\begin{aligned}mG&\leqslant\sum mu_i+\sum mv_i\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i-a_i}{4}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i-a_i}{4}\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)=\frac{1}{2}[1-mE]\\&=\frac{1}{2}(1-0.6)=0.2.\end{aligned}$$

即 $mG\leqslant0.2$. 而 $mE=0.6>mG$，所以 G 不可能覆盖 E(∵若 $E\subseteq G$，则应有 $mE\leqslant mG$).

[3.53] 试证 R^n 中，$n-1$ 维超平面

$$P=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1=0,\ -\infty<x_i<\infty,i=2,3,\cdots,n\}$$
的测度为 0.

解 令 $P=\sum_{k=1}^{\infty}P_k$，其中

$$P_k=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1=0,\ -k\leqslant x_i\leqslant k,i=2,3,\cdots,n\}.$$

对$\forall\ \varepsilon>0$，作 n 维开区间 I_k

$$I_k=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,|x_1|<\frac{\varepsilon}{2^n\cdot(k+1)^{n-1}}|x_i|<k+1,\right.$$

$$\left.i=2,3,\cdots,n\right\},$$

$\because$ $P_k\subseteq I_k(k=1,2,\cdots)$，且

$$m^*P_k\leqslant|I_k|=\frac{2\varepsilon}{2^n\cdot(k+1)^{n-1}}[2(k+1)]^{n-1}=\varepsilon.$$

$\therefore$ 由 ε 的任意性知 $m^*P_k=0$，即 P_k 为零测集. 故 P 为零测集，$mP=0$.

[**3.54**] 设 E 是[0,1]中的全体无理点所成的集，

(1) 求 mE.

(2) 由内外测度的定义，考察其测度与 1 任意接近的含于 E 内的闭集及包含 E 的开集的构造是怎样的.

解 (1) 设 Q 为[0,1]中的全体有理数所成的集，则 $E+Q=[0,1]$，$EQ=\varnothing$，

又已知 $mQ=0$. 于是 $E=[0,1]-Q$ 可测，且

$$mE=m[0,1]-mQ=1.$$

(2) 先作测度与 1 任意接近的包含 E 的开集，取$G=(0,1)$或

$G=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$即可.

再作测度与 1 任意接近的含于 E 的闭集. 记 $Q=\{r_1,r_2,\cdots\}$，对$\forall\ \varepsilon>0$，作

$$G_0=\sum_{n=1}^{\infty}\left(r_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\ r_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right),$$

则 $$mG_0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m\left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

现令 $F=[0,1]-G_0$,因 $Q\subseteq G_0$,所以 $F\subseteq E$;又因 G_0 是开集,所以 F 为闭集,且有

$$1 \geqslant mF \geqslant 1 - \varepsilon,$$

而 ε 任意,故 F 的测度可以与 1 任意接近.

[**3.55**] 作$[0,1]\times[0,1]$中的点集.

$$E = \{(x,y) \mid x \text{ 与 } y \text{ 至少有一个是有理数}\},$$

试求 mE.

解 因 $\mathscr{C}E=\{(x,y)\mid x,y$ 都是$[0,1]$中的无理数$\}$
$=E_1\times E_2$.

其中 E_i 是$[0,1]$中的无理点集$(i=1,2)$,于是

$$mE_i = 1 \quad (i = 1,2).$$

因此

$$m(\mathscr{C}E) = m(E_1 \times E_2) = mE_1 \times mE_2 = 1 (\text{定理 } 3.5)$$

故 E 可测,且

$$mE = 1 - m(\mathscr{C}E) = 1 - 1 = 0.$$

五、若干杂题

[**3.56**] 试在 $\mathbf{R}^1$ 中作一个由某些无理数构成的闭集 F,使

$$mF > 0.$$

解 取 $E=[\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$,则 E 的两个端点是无理数且 $mE=1$. E 内的全部有理数记为

$$Q = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}.$$

下面我们构造含于 E 的一个开集 G,且使

$$Q = \{r_n\} \subseteq G.$$

第一步:以 r_1 为中心,以无理数

$$\varepsilon_1 = \min\{|\sqrt{2} - r_1|, |1 + \sqrt{2} - r_1|, \sqrt{2}/2^2\}$$

为半径作一个开区间

$$G_1 = (r_1 - \varepsilon_1, r_1 + \varepsilon_1).$$

第二步：以 $Q-G_1$ 中下标最小的一个 r_{k_2} 为中心作一个开区间 G_2 使其半径为不超过 $\sqrt{2}/2^3$ 的无理数 $\varepsilon_2>0$，且 $G_1G_2=\varnothing$；…….

第 n 步：以 $Q-\sum_{i=1}^{n-1}G_i$ 中下标最小的一个有理数 r_{k_n} 为中心作一个开区间 G_n，使之半径为不超过 $\sqrt{2}/2^{n+1}$ 的无理数 $\varepsilon_n>0$，且

$$G_nG_i=\varnothing\ (i=1,2,\cdots,n-1).$$

…………

令 $G=\sum_{n=1}^{\infty}G_n$，则显然 G 为开集，且每个 G_i 为其构成区间，由 G_n 及 G 的构作知，

$$G\supseteq Q=\{r_n\}.$$

取 $F=E-G$，则 F 是闭集（其实是完备集），因 E 中全部有理数均含于 G，所以 F 尽由无理数组成.

因为

$$mG\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mG_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(<1),$$

所以

$$mF\geqslant mE-mG\geqslant 1-\sqrt{2}/2>0.$$

故 F 为所求之集.

[3.57] 设 E 是直线上一有界集合，$m^*E>0$，则对 $\forall\ c(0<c<m^*E)$，$\exists\ E_1\subseteq E$，使 $m^*E_1=c$.（该性质称为外测度的介值定理）

证 因 E 有界，所以有闭区间 $[a,b]$，使

$$E\subseteq[a,b].$$

(i) 先证下述引理：若 $E\subseteq[a,b]$ 且 $m^*E>0$，令

$$E_x=E\cap[a,x]\ (x\in[a,b]).$$

并设 $f(x)=m^*E_x$，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调不减的连续函数.

事实上，因

$$E_a=E\cap\{a\}=\{a\},\quad E_b=E\cap[a,b]=E,$$

则

$$f(a)=0,\ f(b)=m^*E.$$

当 $x_1 < x_2$ 且 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 时

$$E_{x_1} = E \cap [a, x_1] \subseteq E \cap [a, x_2] = E_{x_2}.$$

由外测度的单调性有

$$f(x_1) = m^* E_{x_1} \leqslant m^* E_{x_2} = f(x_2).$$

因此，$f(x)$ 是单调不减函数. 而

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= m^* E_{x_2} - m^* E_{x_1} (\text{设 } x_1 < x_2) \\ &= m^*(E_{x_1} \cup E \cap [x_1, x_2]) - m^* E_{x_1} \\ &\leqslant m^*(E \cap [x_1, x_2]) \leqslant m^*[x_1, x_2] = x_2 - x_1. \end{aligned}$$

同样，当 $x_2 < x_1$ 时，$f(x_1) - f(x_2) \leqslant x_1 - x_2$.

因此

$$|(f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|.$$

于是，让 x_1 为 $[a,b]$ 上任意一点 x，$x_2 = x + \Delta x \subseteq [a,b]$，则有

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leqslant |\Delta x|.$$

故 $f(x+\Delta x) \to f(x) (\Delta x \to 0)$，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(ii) 再转证本题：由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对 $\forall\, c, 0 < c < m^* E$，即 $f(a) < c < f(b)$，由闭区间上连续函数的介值定理，$\exists\, x_0 \in (a,b)$，使

$$f(x_0) = c, \text{即 } m^*(E \cap [a, x_0]) = c.$$

现记 $E_1 = E \cap [a, x_0]$，显然 $E_1 \subseteq E$. 命题得证.

注 本题作连续函数

$$f(x) = m^* E_x = m^*(E \cap [a, x])$$

的方法很重要，引理中的"m^*"换为"m"，结论仍然成立. 利用该函数讨论各种测度的连续性时十分有用.

[3.58] （测度的介值定理）设 E 为 $\mathbf{R}^1$ 上的可测集，且 $mE > 0$，则 $\forall\, c (0 < c < mE)$，$\exists$ 有界可测集 $E_0 \subseteq E$，使 $mE_0 = c$.

证 由于可测集 E 不一定有界，所以令

$$E_n = E \cap [-n, n] \ (n = 1, 2, \cdots),$$

则 E_n 可测，$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_n \subseteq \cdots$，且有

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

由定理 3.3 知

$$\lim_{n\to\infty} mE_n = mE > c > 0 \ (\because c < mE).$$

由极限的保号性，∃ $n_0>0$，使

$$mE_{n_0} > c. \text{记 } mE_{n_0} = c_0(> c).$$

而 E_{n_0}为有界可测集，且

$$E_{n_0} = E \cap [-n_0, n_0] \subseteq [-n_0, n_0].$$

作函数 $f(x)=mE_x=m(E_{n_0}\cap[-n_0,x])$，
则由上题的引理，有 $0\leqslant f(x)\leqslant c_0$，且 $f(x)$为$[-n_0,n_0]$上单调不减的连续函数，$f(-n_0)=0$，$f(n_0)=mE_{n_0}=c_0$，

故 ∃ $x_0\in(-n_0,n_0)$，使 $f(x_0)=mE_{x_0}=c$.

令 $E_0=E_{x_0}=E\cap[-n_0,x_0]\subseteq E$，则 E_0 为符合要求的有界可测集.

[3.59] 设 E 为 $\mathbf{R}^1$ 上的可测集，$mE>0$，而 $0<c<mE$，则存在有界完备集 $E_1\subseteq E$，使 $mE_1=c$.

证 因 $0<c<mE$，取 c_1：$0<c<c_1<mE$，由上题知，存在有界可测集 $A\subseteq E$，使 $mA=c_1$. 取 $\varepsilon_0=c_1-c>0$，由于 A 可测，应有

$$mA = m_* A = \sup\{mF \mid F \subseteq A, F \text{ 为闭集}\}.$$

所以由上确界的性质，对 $\varepsilon_0>0$，∃ 闭集 $F\subseteq A$，使

$$mF > mA - \varepsilon_0 = c_0 - (c_1 - c) = c.$$

由于 A 有界可测，$F\subseteq A$，所以，F 是有界闭集. 于是存在闭区间$[a,b]\supseteq F$，令

$$F_x = F \cap [a,x], \ f(x) = mF_x,$$

则有 $f(a)=0$，$f(b)=mF>c$.

由题[3.57]中的引理知 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，故由介值定理知，当 $0<c<mF$ 时，必∃ $x_0\in(a,b)$，使

$$f(x_0) = mF_{x_0} = c.$$

其中 $F_{x_0}=F\cap[a,x_0]$是有界闭集(是闭集之交集).

由于直线上任一闭集可表示为一完备集与一孤立点集之并，所以，∃ 完备集 E_1 及至多可列集（孤立点集）D，使

$$F_{x_0} = E_1 + D.$$

从而 $$mF_{x_0} \leqslant mE_1 + mD = mE_1.$$

又 $$F_{x_0} \supseteq E_1,\text{即 } mF_{x_0} \geqslant mE_1.$$

故有 $$mE_1 = mF_{x_0} = c.$$

其中 E_1 是有界完备集，且

$$E_1 \subseteq F_{x_0} \subseteq F \subseteq A \subsetneqq E.$$

[3.60] 设 $E(\subseteq \mathrm{R}^1)$为正测度集，则

(1) ∃ x_1、$x_2 \in E$，使 $|x_1 - x_2|$ 为无理数.

(2) ∃ x_1、$x_2 \in E$，使 $|x_1 - x_2|$ 为有理数.

证 (1) 由于 $mE > 0$，得知 E 具有连续统的势 c.

现取 $x_1 \in E$，作集合：

$$\{|x_1 - x| \mid x \in E\} = A,$$

则 A 与 $E - \{x_1\}$ 一一对应，即 A 亦具有连续统的势.

故 $|x_1 - x|$ $(x \in E)$ 不可能全是有理数. 即 ∃ $x_2 \in E$，使 $|x_1 - x_2|$ 是无理数.

(2)（证法一）

由题[3.59]，存在有界完备集 $E_1 \subseteq E$，使

$$mE_1 = c\ (0 < c < mE).$$

不妨设 $$E_1 \subseteq [-N, N]\ (N > 1).$$

将$[-1,1]$中全部有理数排列为$\{r_1, r_2, \cdots\}$，对 E_1 作平移变换：

$$\varphi_n(x) = x + r_n \quad (x \in E),\ n = 1,2,\cdots$$

记 $$\varphi_n(E_1) = E_1^{(n)} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由 E_1 的可测性及测度的平移不变性，有

$$mE_1^{(n)} = mE_1 = c > 0 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

但 $|r_n| \leqslant 1$，所以

$$E_1^{(n)} \subseteq [-N-1, N+1] \quad (n = 1,2,\cdots).$$

从而 $$\sum_{n=1}^{\infty} E_1^{(n)} \subseteq [-N-1, N+1].$$

假设对$\forall\ n,m\in \mathrm{N}(n\neq m)$，均有 $E_1^{(n)}\cap E_1^{(m)}=\varnothing$，

则有

$$2(N+1)=m[-N-1, N+1]\geqslant m\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_1^{(n)}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} mE_1^{(n)}\ (E_1^{(n)}\text{ 两两不交})$$

$$=c+c+\cdots+c+\cdots=+\infty.$$

这一矛盾说明前述假设是不可能成立的. 因此，$\exists\ n_0$、m_0 $(n_0\neq m_0)$. 使 $E_1^{(n_0)}\cap E_1^{(m_0)}\neq\varnothing$. 故不妨设

$$x_0\in E_1^{(n_0)}\cap E_1^{(m_0)}.$$

由 $x_0\in E_1^{(n_0)}$，$\exists\ x_1\in E_1$，使

$$\varphi_{n_0}(x_1)=x_0, x_0=x_1+r_{n_0},$$

由 $x_0\in E_1^{(m_0)}$，$\exists\ x_2\in E_1$，使

$$\varphi_{m_0}(x_2)=x_0,\ x_0=x_2+r_{m_0}.$$

于是，$|x_1-x_2|=|r_{n_0}-r_{m_0}|$为有理数，$x_1$、$x_2\in E$.

（证法二）

对 E 中的点进行如下分类：$\forall\ x_1$、$x_2\in E(x_1\neq x_2)$，若x_1-x_2为有理数，则规定 $x_1\sim x_2$（x_1、x_2 属同一类）.

在此意义下，E 中所有点被分成互不相交的类 K_α，

$$E=\sum_{\alpha\in A} K_\alpha\quad(\text{其中 } A \text{ 为指标集}).$$

在每个类 K_α 中选一点 x_α 为代表，组成集合 E_1，则 $E_1\subseteq E$.

由 $mE>0$ 及 E_1 的作法知 E_1 为不可测集（见郑维行、王声望编《实变函数与泛函分析概要》第一册 P46～48，关于一维不可测集的例子及其构作方法）. 若 E 中任二点之差均不是有理数，则每个类 K_α 仅含一点 x_α，从而 $E_1=E$. 但已知 E 可测，E_1 不可测. 因此 $E_1=E$ 不可能成立. 故至少有一个类 K_{α_0}含两个以上的点.

即有 x_1，$x_2\in E$，$|x_1-x_2|$为有理数.

[3.61] (1) 证明测度为零的非空闭集为疏集.

(2) 若将闭集条件去掉,结论是否成立?

(3) 若 $mE=0$,则 $\mathscr{C}E$ 是否为稠密集?

证 (1) 设闭集 $E\neq\varnothing$,而 E 不是疏集,则 $\overline{E}(\subseteq E)$中至少有一个区间

$$[a,b]\subseteq\overline{E}(a<b)\subseteq E.$$

$$\therefore\qquad mE\geqslant m[a,b]=b-a>0.$$

这与题设矛盾.

故 E 必为疏集.

(2) 若将闭集条件去掉,结论一般不成立,如有理数集是稠密的零测集.

(3) 可以断定,若 $mE=0$,则 $\mathscr{C}E$ 为稠密集. 事实上,设 E $(\subseteq\mathrm{R}^1)$为零测集. $\forall\ x\in E$,在$(x-1,x+1)$中必有一点 $x_1\in\mathscr{C}E$,不然的话,整个$(x-1,x+1)\subseteq E$,则 $mE\geqslant m(x-1,x+1)=2$,矛盾;同样,令

$$\varepsilon_2=\min\{\frac{1}{2},|x-x_1|\},$$

在$(x-\varepsilon_2,x+\varepsilon_2)$中必有一点 $x_2\in\mathscr{C}E,\cdots\cdots$

令 $$\varepsilon_n=\min\{1/n,|x-x_{n-1}|\},$$

必有 x_n:

$$x_n\in(x-\varepsilon_n,x+\varepsilon_n),\text{且 } x_n\in\mathscr{C}E.$$

如此继续下去,得到

$$\{x_n\}\subseteq\mathscr{C}E:x_n\longrightarrow x(n\to\infty).$$

由 $x\in E$ 的任意性知

$$E\subseteq(\mathscr{C}E)'.$$

$$\therefore\qquad\overline{\mathscr{C}E}=\mathscr{C}E\cup(\mathscr{C}E)'\supseteq\mathscr{C}E\cup E=\mathrm{R}^1.$$

故 $\mathscr{C}E$ 是 R^1 中的稠密集.

[3.62] 设可测集 $E\subseteq[-1,1]$,且 $mE>1$,则存在可测集 $E_1\subseteq E$,使 $mE_1>0$,且 E_1 是关于原点对称的集合.

证 令 $A=E\cap[0,1]$, $B=E\cap[-1,0]$,

显然 $$E = A + B,\ AB \subsetneq \{0\},$$
A、B 均可测，且 $mA \leqslant 1$，$mB \leqslant 1$.

又因 $$mA + mB = mE > 1,$$

所以 $$mA > 0 (mB > 0).$$

作集 A 关于原点的对称集
$$A^* = \{y \mid y = -x, x \in A\}.$$

则 $A^* \subseteq [-1,0]$，且由测度对运动的不变性（运动系指平移或对称反射）可知
$$mA^* = mA > 0.$$
于是有
$$mA^* + mB = mA + mB > 1.$$
从而 $$A^*、B \subseteq [-1,0],\ mA^* + mB > 1.$$
但
$$m(A^* \cup B) \leqslant m[-1,0] = 1. (\because A^* \cup B \subsetneq [-1,0])$$
因此
$$m(A^* \cap B) = mA^* + mB - m(A^* \cup B) > 0.$$

记 $D = A^* \cap B$，则
$$D \subsetneq B \subsetneq E,$$
$$D^* = \{x \mid x = -y,\ y \in D\}.$$
$$E_1 = D \cup D^*.$$
由于 $D \subseteq B$，且 $D \subseteq A^* \Longrightarrow D^* \subseteq A$，则
$$E_1 \subseteq B \cup A = E.$$

故 E_1 关于原点对称（$\because D$ 与 D^* 对称），且
$$mE_1 = mD + mD^* = 2mD = 2m(A^* \cap B) > 0$$
$$(\because D \cap D^* \subsetneq \{0\}).$$

注 作集 E_1 时很容易产生一个误解，而认为 $mA = mA^* > 0$，且集 A 与 A^* 显然关于原点对称，因此令 $E_1 = A \cup A^*$. 这是错误的，因为尽管有 $A \subseteq E$，但 A^* 中的点不一定全含于 E，从而这样的 E_1 不一定是 E 的子集.

[3.63] 设可测集 $E\subseteq\mathbf{R}^1, mE>0$,则$\exists\, x\in E$,使对$\forall\,\delta>0$,有

$$m(E\cap(x-\delta,x+\delta))>0.$$

证 用反证法,假定对$\forall\, x\in E$,$\exists\,\delta_x>0$,使

$$m(E\cap(x-\delta,x+\delta))=0.$$

我们在此假设之下将导出 $mE=0$,与题设矛盾.从而命题得证.

令 $E_n\triangleq E\cap I_n(n=1,2,\cdots)$,其中

$$I_n=[-n,-(n-1)]\cup[n-1,n]$$

为闭集.

则有 $$E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n,\ mE\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mE_n.$$

且每个 E_n 为有界可测集,下证 $mE_n=0$.

若 $E_n=\varnothing$,则显然 $mE_n=0$.

若 $E_n\neq\varnothing$,则用如下方法作 I_n 的开复盖:

$$I_n\subseteq\sum_{\alpha\in A}U_\alpha.$$

其中,$\{U_\alpha\}$是开区间族,该族不但包括全部与 E 无公共点的开区间,而且还包括所有满足下述条件的开区间 U_α:

$\forall\, x\in E_n\subseteq E$,可作

$$U_{\alpha_x}=(x-\delta,x+\delta)\ (\delta>0)$$

使 $x\in U_\alpha$,且由假设

$$m(E\cap(x-\delta,x+\delta))=0. \qquad (*)$$

从而由有限复盖定理知

$$\exists\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k:\ I_n\subseteq\sum_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}.$$

于是

$$mE_n=m(E\cap I_n)\leqslant\sum_{i=1}^{k}m(E\cap U_{\alpha_i})=0.$$

(因 $E\cap U_{\alpha_i}=\varnothing$或 $E\cap U_{\alpha_i}\neq\varnothing$但满足($*$)式).

故 $mE_n=0(n=1,2,\cdots)$.

因此

$$0 \leqslant mE \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mE_n = 0,$$

即 $mE=0$. 这与题设中的 $mE>0$ 相矛盾.

[3.64] 设可测集 $E\subseteq(0,1)$，若 $\exists\ \alpha>0$，$\forall\ (a,b)\subseteq(0,1)$有

$$m(E\cap(a,b))\geqslant\alpha(b-a),$$

则

$$mE = 1.$$

证 由 $E\subseteq(0,1)$知 $mE\leqslant 1$,所以只要证明 $mE<1$ 不成立即可.我们用反证法完成这一证明.

设 $mE<1$,令 $A=(0,1)-E$,则 A 为可测集.由于 $E\subseteq(0,1)$,所以

$$mA = m[(0,1) - E] = m(0,1) - mE = 1 - mE > 0.$$

又 $\alpha>0$,则 $\alpha mA>0$.

现取 $\varepsilon=\alpha mA/2>0$,则由于

$$mA = m^* A = \inf\{mG \mid A \subseteq G, G \text{ 为开集}\},$$

由下确界定义,存在开集 G,且 $A\subseteq G\subseteq(0,1)$,使

$$mG < mA + \varepsilon.$$

从而

$$mA \leqslant mG < mA + \varepsilon = mA + \frac{1}{2}\alpha mA = \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)mA.$$

但 G 是开集,设其构成区间为(α_k,β_k),则

$$G = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k).$$

由题设,$\forall\ (a,b)\subseteq(0,1)$,有

$$m(E \cap (a,b)) \geqslant \alpha(b - a).$$

所以

$$\begin{aligned} m(E \cap G) &= m\Big(\sum_k E \cap (\alpha_k,\beta_k)\Big) \\ &= \sum_k m(E \cap (\alpha_k,\beta_k)) \geqslant \sum_k \alpha(\beta_k - \alpha_k) \\ &= \alpha\sum_k(\beta_k - \alpha_k) = \alpha mG. \end{aligned}$$

而

$$G=(0,1)\cap G=(E\cap G)\cup(A\cap G),\text{且 } A\subseteq G.$$

于是

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)mA> mG&=m(E\cap G)+m(A\cap G)\\&\geqslant \alpha mG+mA\\&\geqslant \alpha mA+mA=(1+\alpha)mA.\end{aligned}$$

故 $\frac{\alpha}{2}>\alpha(\alpha>0)$. 这是不可能的.

这就证得 $mE<1$ 不成立. 即应有 $mE=1$.

[3.65] 设 $\{E_n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集列, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 有界,

则

(1) $m(\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}mE_n$.

(2) $m(\varlimsup\limits_{n\to\infty}E_n)\geqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}mE_n$.

证 (1) 因为 $\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\prod\limits_{k=n}^{\infty}E_k$,

而 $\left\{\prod\limits_{k=n}^{\infty}E_k\right\}$ 为递增可测集列, 所以, 由定理 3.3(4), 得

$$m(\varliminf_{n\to\infty}E_n)=m\left(\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=n}^{\infty}E_k\right)=\lim_{n\to\infty}m\left(\prod_{k=n}^{\infty}E_k\right).$$

又由 $\prod\limits_{k=n}^{\infty}E_k\subseteq E_k$, 有

$$m\left(\prod_{k=n}^{\infty}E_k\right)\leqslant mE_k,\quad n=1,2,\cdots$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}m\left(\prod_{k=n}^{\infty}E_k\right)=\varliminf_{n\to\infty}m\left(\prod_{k=n}^{\infty}E_k\right)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}mE_n.$$

(因由数学分析知, 若二数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 满足 $x_n\leqslant y_n$, 则 $\varliminf x_n\leqslant\varliminf y_n$)

故 $$m(\varliminf_{n\to\infty}E_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}mE_n.$$

(2) 因为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}E_k$,

而$\{\sum\limits_{k=n}^{\infty}E_k\}$为递减可测集列,于是有

$$m(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n)=\lim_{n\to\infty}m(\sum_{k=n}^{\infty}E_k).$$

而 $\sum\limits_{k=n}^{\infty}E_k\supseteq E_n$,则

$$m(\sum_{k=n}^{\infty}E_k)\geqslant mE_n,\ n=1,2,\cdots$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}m(\sum_{k=n}^{\infty}E_k)=\overline{\lim_{n\to\infty}}m(\sum_{k=n}^{\infty}E_k)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}mE_n,$$

故 $$m(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n)\geqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}mE_n.$$

[3.66] 举出一列可测集$\{E_n\}$,含在一个有限区间中,且$\lim\limits_{n\to\infty}mE_n$存在,但

$$m(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n)\neq m(\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n).$$

解 考察如下集列

$$E_n=\begin{cases}\left(-1-\frac{1}{n},\ 0\right], & n=1,3,5,\cdots\\ \left[0,\ 1+\frac{1}{n}\right). & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

显然 $E_n\subseteq(-2,2)$,即$\{E_n\}$为有界可测集列.

但
$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n&=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}E_k\right)\\&=\left\{\prod_{n\text{奇数}}\left(-1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n+1}\right)\right\}\\&\quad\cap\left\{\prod_{n\text{偶数}}\left(-1-\frac{1}{n-1},1+\frac{1}{n}\right)\right\}\\&=[-1,1]\end{aligned}$$

于是

$$m(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n) = m[-1,1] = 2.$$

而 $$\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=n}^{\infty}E_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\{0\} = \{0\}.$$

因此 $$m\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n\right) = m\{0\} = 0.$$

故 $$m\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}E_n\right) \neq m\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n\right).$$

[3.67] 设 $E\subseteq \mathrm{R}^1$，且存在 $\alpha, 0<\alpha<1$，使得对于任一开区间 (a,b)，都存在开区间列 $\{I_k\}$，使

$$E\cap(a,b)\subseteq\sum_{k=1}^{\infty}I_k,\ \sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<(b-a)\alpha.$$

试证 $mE=0$.

证 （反证法）设 $mE\neq0$，即 $m^*E>0$，则由于

$$m^*E=\inf\{mG\,|\,E\subseteq G, G\text{ 为开集}\},$$

依下确界性质，对

$$\varepsilon=\frac{1-\alpha}{2\alpha}\cdot m^*E>0,$$

应存在开集 $G\supseteq E$，使

$$mG<m^*E+\varepsilon=\frac{1+\alpha}{2\alpha}\cdot m^*E.$$

设 (α_k,β_k) 为 G 的构成区间，即

$$G=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k).$$

由题设，对每个 (α_k,β_k)，$\exists$ 开区间列 $\{I_i^k\}$，使

$$E\cap(\alpha_k,\beta_k)\subseteq\sum_{i=1}^{\infty}I_i^k,\quad \sum_{i=1}^{\infty}|I_i^k|<(\beta_k-\alpha_k)\alpha.$$

于是

$$m^*E=m^*(E\cap G)=m^*\left\{E\cap\sum_k(\alpha_k,\beta_k)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= m^*\left(\sum_k E \cap (\alpha_k, \beta_k)\right) \\
&\leqslant \sum_k m^*(E \cap (\alpha_k, \beta_k)) \\
&\leqslant \sum_k m^*\left(\sum_i I_i^k\right) \\
&\leqslant \sum_k \sum_i m^* I_i^k = \sum_k \sum_i |I_i^k| \\
&< \sum_k (\alpha(\beta_k - \alpha_k)) = \alpha m G. \\
&< \alpha \cdot \frac{1+\alpha}{2\alpha} \cdot m^* E = \frac{1+\alpha}{2} m^* E \\
&< m^* E \ (\because 0 < \alpha < 1).
\end{aligned}
$$

即 $m^*E < m^*E$. 这是不可能的.

故 $mE = 0$.

[**3.68**] 试证,每一非空完备集 E 必含有一个测度为零的非空完备子集 E_1.

[**分析**] 设 E 为非空完备集,即 $E \neq \varnothing$,且 $E = E'$.(E 的每个点都是 E 的极限点,反之亦然)若 $mE = 0$,则结论已得. 若 $mE > 0$,我们构造出一个闭集 $F \subseteq E$,使 $mF = 0$. 由于直线上任一闭集可表为一完备集与一孤立点集(至多可列)之并,故有完备集 $E_1 \subseteq F$ 及至多可列集 $D \subseteq F$,使

$$F = E_1 \cup D.$$

从而 $$E_1 \subseteq F \subseteq E,\ 0 \leqslant mE_1 \leqslant mF = 0,$$

即 $mE_1 = 0$. 要使 E_1 非空(即 E_1 与 $[0,1]$ 等势),就必须 F 具有连续基数,故我们的任务是要作出 E 的一个非空闭子集 F、且

$$mF = 0、F \sim [0,1].$$

证 (i) 设 E 非空完备,且 $mE > 0$($\because mE = 0$ 结论自然成立). 则 E 为不可列集,于是可取 $\{x_0, x_1\} \subset E$,$x_0 \neq x_1$. 作小区间 δ_{i_1} $(i_1 = 0, 1)$,使

$$x_{i_1} \in \delta_{i_1}(i_1 = 0,1), \ m\delta_{i_1} < 1/2^2(i_1 = 0,1).$$

且$\overline{\delta_0} \cap \overline{\delta_1} = \varnothing$. 注意$\overline{\delta_0}$,$\overline{\delta_1}$为不可列闭集(是闭区间).

由于x_0、x_1为E的极限点,易证$E\cap\overline{\delta_0}$和$E\cap\overline{\delta_1}$均为不可列集($E\cap\overline{\delta_{i_1}}$是完备集与闭区间的非空交集),记其极限点的全体分别为P_0,P_1,则$P_{i_1}(i_1=0,1)$为非空完备集,且

$$P_{i_1} \subseteq E, \ mP_{i_1} \leqslant m\,\overline{\delta_{i_1}} < 1/2^2(i_1 = 0,1).$$

并且有$P_0 \cap P_1 = \varnothing$,于是

$$m\sum_{i_1=0,1} P_{i_1} < 2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}.$$

(ii) 对每个$P_{i_1}(i_1=0,1)$施行同样手续,得出4个非空完备集$P_{i_1i_2}(i_1=0,1;\ i_2=0,1)$,满足

$$P_{i_1i_2} \subseteq P_{i_1}, \ mP_{i_1i_2} < 1/2^4,$$

$$P_{i_1i_2} \cap P_{i_1'i_2'} = \varnothing(i_1 \neq i_1' \text{ 或 } i_2 \neq i_2').$$

(iii) 再对每个$P_{i_1i_2}$施行同样的手续. 如此一直做下去,得到一列完备集:P_{i_1}(2个)、$P_{i_1i_2}$(4个),…,$P_{i_1\cdots i_n}$(2^n个),……($i_n=0,1;n=1,2,\cdots$). 且有

$$P_{i_1i_2\cdots i_n} \subseteq P_{i_1\cdots i_{n-1}} \subseteq E, \ mP_{i_1\cdots i_n} \leqslant 1/2^{2n},$$

$$P_{i_1\cdots i_n} \cap P_{i_1'\cdots i_n'} = \varnothing(\text{至少有一个 } i_k \neq i_k').$$

(iv) 现令

$$A_n = \sum_{\substack{i_k=0,1 \\ k=1,2,\cdots,n}} P_{i_1\cdots i_k\cdots i_n}(n = 1,2,\cdots),$$

则$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$,且

$$mA_n = 2^n \cdot mP_{i_1\cdots i_n} < 2^n(1/2^{2n}) = 1/2^n(n = 1,2,\cdots).$$

再令

$$F = \prod_{n=1}^{\infty} A_n,$$

则F就是我们所要构造的闭集. 事实上,因为$F \subseteq A_n \subseteq E$,所以

$$0 \leqslant mF \leqslant mA_n < 1/2^n(n = 1,2,\cdots),$$

$\therefore \quad mF=0.$

又因 A_n 是闭集，所以，F 为(闭集的可数交集)闭集，而每个 0,1 序列($i_1i_2\cdots i_n\cdots$)所对应的完备集列

$$P_{i_1}\supseteq P_{i_1i_2}\supseteq\cdots\supseteq P_{i_1i_2\cdots i_n}\supseteq\cdots$$

至少决定一个点

$$x_{i_1i_2\cdots i_n\cdots}\in P_{i_1\cdots i_n},\ n=1,2,\cdots$$

于是有

$$F=\{x_{i_1i_2\cdots i_n\cdots}\mid x_{i_1\cdots i_n\cdots}\in\prod_{i_1\cdots i_n\cdots}P_{i_1\cdots i_n},i_n=0,1,n=1,2,\cdots\}.$$

因此，$F\sim[0,1]$.

故我们已构造出 E 的一个测度为 0，且与[0,1]等势的闭子集 F. 再由前面的分析，命题得证.

第四章　可 测 函 数

内 容 提 要

［**定义 4.1**］　(1) 设 E 为 R^n 中的可测集，$f(x)$是定义于 E 而取值于广义实数系 $\widetilde{R}=\mathrm{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ 的实值函数.我们规定如下记法：

$$E[p(x)]\triangleq\{x\in E\mid x\text{ 具有性质 }p(x)\}.$$

由此不难看出：

$$E[f(x)>a]=\{x\in E\mid f(x)>a,a\in\widetilde{R}\}.$$

此集还可简记为 $E[f>a]$.类似地，可以理解

$$E[f=a]、E[a\leqslant f<b]、E[f\geqslant a]、E[f<a]$$

等等.

(2) 若 f 为非负函数，则称下述 R^{n+1}中的集合

$$G(E;f)\triangleq\{(x,z)\in\mathrm{R}^{n+1}\mid x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$\in E\subseteq\mathrm{R}^n,0\leqslant z<f(x),z\in\mathrm{R}^1\}$$

为 $f(x)$在 E 上的下方图形.

［**定义 4.2**］　可测函数的第一定义：

(1) 设 $f(x)$是定义在可测集 E 上的实值函数，

若 $E=\sum\limits_{i=1}^{n}E_i$，$E_i$ 可测$(i=1,2,\cdots,n)$，且

$$f(x)=c_i,x\in E_i.$$

则称 $f(x)$为 E 上的简单函数.

(2) 设$\{\varphi_n(x)\}$是 E 上非负简单函数列，满足$\forall\ x\in E$，$\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)(n=1,2,\cdots)$，而

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\text{（}f\text{ 显然是非负函数），}$$

则称 $f(x)$ 为可测集 E 上的非负可测函数.

(3) 一般,若 $f(x)$ 为可测集 E 上的实值函数,

令
$$f^+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x)>0 \\ 0. & \text{当 } f(x)\leqslant 0 \end{cases}$$
$$f^-(x)=\begin{cases} -f(x), & \text{当 } f(x)<0 \\ 0. & \text{当 } f(x)\geqslant 0 \end{cases}$$
显然 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$,其中 $f^+(x)$、$f^-(x)$ 都是非负函数.如果 f^+、f^- 都是 E 上的可测函数,则称 $f(x)$ 为 E 上的可测函数,简称 (L) 可测函数.

[定义 4.3] 可测函数的第二定义:

设 $f(x)$ 是定义于可测集 E 而取值于广义实数系的实值函数.若
$$\forall\ \alpha\in \mathrm{R}^1,\text{集 } E[f>\alpha] \text{可测}(L\text{-可测}),$$
则称 $f(x)$ 为 E 上的 (L) 可测函数.

注 1° 我们将在本章的有关题解中给出这两个定义的等价性证明.可测函数的第二定义应用起来很方便,因此在以下叙述中,我们将以定义 4.3 作为可测函数的基本定义.

2° 在定义 4.2(2)中,简单函数列的极限函数不一定是简单函数,甚至在某些点极限函数 $f(x)$ 可能为∞.然而,简单函数一定是可测函数.

3° 非负可测函数显然是可测函数,所以非负可测函数具有可测函数的一切性质.

4° 可测集 E 上的常数函数是简单函数,所以是可测函数.

[定理 4.1] 可测函数的若干基本性质:

(1) 以下各条相互等价:

(i) $f(x)$ 在 E 上可测,即 $\forall\ \alpha\in \mathrm{R}^1$:$E[f>\alpha]$ 可测.

(ii) $\forall\ \alpha\in \mathrm{R}^1$:$E[f\geqslant\alpha]$ 可测.

(iii) $\forall\ \alpha\in \mathrm{R}^1$:$E[f<\alpha]$ 可测.

(iv) $\forall\ \alpha\in \mathrm{R}^1$:$E[f\leqslant\alpha]$ 可测.

(v) $\forall\ a,b\in \mathrm{R}^1,a<b$:$E[a\leqslant f<b]$ 可测.

(vi) $\forall\ r\in D\subseteq \mathrm{R}^1, \overline{D}=\mathrm{R}^1$：$E[f>r]$可测.

特别$\forall\ r\in \mathrm{Q}$(有理数集)：$E[f>r]$可测.

(vii) 存在简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$：$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$.

(2) $f(x)$在E上可测的充要条件是：$f(x)$可表示为二非负可测函数之差(即可测函数的两个定义等价).

(3) $f(x)$为E上的非负可测函数的充要条件是：f在E上的下方图形$G(E;f)$是R^{n+1}中的可测集.

(4) 设$f(x)$为E上的可测函数，则

$$E[f=a](a\in\mathrm{R}^1),\ E[f<\infty]、$$
$$E[f=\infty]、E[f>-\infty]、E[f=-\infty]$$

皆为可测集.

(5) 若f在E上可测，E_1是E的可测子集，则f在E_1上可测.

(6) 设f在$E_1\cup E_2$上有定义，且f在$E_i(i=1,2)$上可测，则$f(x)$在$E_1\cup E_2$上可测.

注 这些性质的大部分证明将在以下题解中见到，其余证明在一般《实函》教科书中可以查到.

[定理 4.2] 可测函数的运算性质：

(1) 设$f(x)$、$g(x)$都在E上可测，则$E[f>g]$为可测集.

(2) 设$f(x)$、$g(x)$都在E上可测，则函数

$$cf(x)(c\in\mathrm{R}^1)、f(x)+g(x)、f(x)\cdot g(x)、|f(x)|、$$
$$f(x)/g(x)(g(x)\neq 0\quad a.e.\ 于\ E)$$

都是E上的可测函数.

(3) 设$\{f_n(x)\}$是E上的可测函数列，则下列函数

(i) $h(x)=\sup\limits_{n\geq 1}f_n(x)$；　(ii) $g(x)=\inf\limits_{n\geq 1}f_n(x)$；

(iii) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)$；　(iv) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)$；

(v) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$(如果极限函数存在).

都是E上的可测函数.

(4) 设$f(x)$、$g(x)$是$E(\subseteq\mathrm{R}^n)$上的广义实值函数，

且 $$f(x)=g(x) \quad a.e \text{ 于 } E,$$
则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上的可测性相同.

[定义 4.4] 设 f 是 $E(\subseteq \mathbb{R}^n)$ 上的实函数.

(1) 对 $x_0\in E$，若 $\forall\ \epsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，$\forall\ x\in E\cap N(x_0,\delta)$

有 $$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon,$$
则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续(相对于集 E 连续).

(2) 若 $\forall\ \epsilon>0$，存在 $\delta>0$，$\forall\ x_1,x_2\in E$，$\rho(x_1,x_2)<\delta$：
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon,$$
则称 f 为 E 上的一致连续函数.

[定义 4.5] 设 $\{f_n\}$ 是定义于 E 上的(广义实值)函数列.

(1) 若存在 E 上的函数 $f(x)$，$\forall\ x\in E$：
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),$$
则称函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上收敛，f 为 $\{f_n\}$ 的极限函数.

(2) 若存在 $E_1\subseteq E$，$mE_1=0$：
$$\{f_n\} \text{ 在 } E-E_1 \text{ 上收敛于 } f.$$
则称 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f，记为
$$f_n \xrightarrow{a.e} f \text{ 于 } E \text{ 或 } f_n \longrightarrow f \ a.e \text{ 于 } E.$$

(3) 若 $\forall\ \epsilon>0$，存在自然数 N，$\forall\ n,m\geqslant N$ 及 $x\in E$：
$$|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon,$$
则称 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.

(4) 若 f、f_n 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 如果 $\forall\ \delta>0$，$\exists\ E_\delta\subseteq E$，$E_\delta$ 可测，且
$$m(E-E_\delta)<\delta,$$
而 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$. 则称 $\{f_n\}$ 在 E 上近(几乎)一致收敛于 $f(x)$. 记为
$$f_n \xrightarrow{a.u.} f \text{ 于 } E.$$

[定义 4.6] 设 E 为可测集，$mE<\infty$，而 $f(x)$、$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 若 $\forall\ \sigma>0$，有
$$\lim_{n\to\infty} mE[x\,|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]=0.$$

(即$\forall\ \sigma>0,\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N,\forall\ n>N:mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]<\varepsilon$)

则称$\{f_n\}$在E上依测度收敛于$f(x)$. 记为

$$f_n \Rightarrow f \text{ 于 } E.$$

注　1° 由定义4.5及数学分析知识显然可知：

"$f_n \xrightarrow{\text{一致}} f$"强于"$f_n \longrightarrow f$"；"$f_n \longrightarrow f$"强于"$f_n \xrightarrow{a.e.} f$".

2° 在定义4.6中，显然有

$$mE[x\,|\,|f_k(x)|=+\infty]=0 \quad (k=1,2,\cdots).$$

因f_k几乎处处有限.

[定理4.3]　叶果洛夫定理

设(1) E可测，$mE<+\infty$.

(2) $\{f_n\}$是E上几乎处处有限的可测函数列.

(3) $f_n \xrightarrow{a.e.} f$于E，且$|f(x)|<+\infty\ a.e.$于E. 则$\forall\ \delta>0$，存在可测集$e\subseteq E$，$me<\delta$，使f_n在$E-e=E_\delta$上一致收敛于$f(x)$.

即　$f_n \longrightarrow f\ a.u.$于$E$.

注　1° 本定理揭示了可测函数列几乎处处收敛与一致收敛之间的关系，根据这个定理，对任一几乎处处收敛的可测函数列，都可在E的一个子集E_δ($\forall\ \delta>0$，$m(E-E_\delta)<\delta$)上当作一致收敛函数列来处理.

2° 本定理是证明鲁金定理的一个重要工具.

3° 当$mE=+\infty$时，本定理不再成立. 反例见题解部分.

4° 本定理的逆命题成立. 即有

$$\text{若 } f_n \longrightarrow f\ a.u. \text{ 于 } E\text{，则 } f_n \longrightarrow f\ a.e. \text{ 于 } E.$$

证明见题解部分.

[定理4.4]　勒贝格收敛定理

设(1) E可测，$mE<+\infty$.

(2) $\{f_n\}$是E上几乎处处有限的可测函数列.

(3) $f_n \longrightarrow f\ a.e.$于$E$，且$|f(x)|<+\infty\ a.e.$于$E$.

则在E上有：$f_n(x) \Longrightarrow f(x)$.

[定理4.5]　若E可测，$f_n \longrightarrow f\ a.u.$于$E$，则

$$f_n(x) \Longrightarrow f(x) \text{ 于 } E.$$

[定理 4.6] 黎斯定理

设 $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$ 于 E，则存在子列

$$\{f_{n_k}(x)\} \subseteq \{f_n(x)\}$$

使
$$f_{n_k} \longrightarrow f \text{ a.e. 于 } E\ (k \to \infty).$$

[定理 4.7] 依测度收敛的极限唯一性：

设 $f_n(x) \Longrightarrow f(x)$ 于 E，且 $f_n(x) \Longrightarrow g(x)$ 于 E，则

$$f(x) = g(x) \text{ a.e. 于 } E.$$

[定理 4.8] 鲁金定理

设 $f(x)$ 为 E 上的几乎处处有限的可测函数，而 $mE < +\infty$（可以取消），则 $\forall\ \delta > 0$，$\exists$ 闭集 $F \subseteq E$，使

$$m(E-F) < \delta,$$

且 $f(x)$ 在 F 上连续.

注 现将几乎处处收敛（$f_n \longrightarrow f$ a.e. 于 E）、几乎一致收敛（$f_n \longrightarrow f$ a.u. 于 E）和依测度收敛（$f_n \Longrightarrow f$ 于 E）之间的关系图示 4－1 如下：

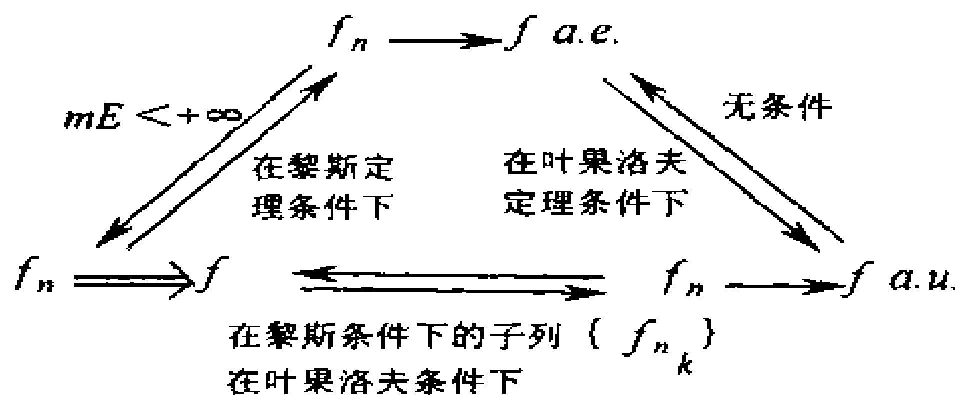


图 4－1

问 题 解 答

一、回答问题并说明理由

[4.1] 任何点集 E 上的常数函数 $f(x)=c,x\in E$ 是可测函数，对吗？

解 不对．我们任何时候说到"函数 $f(x)$ 在集 E 上为可测函数"都不能忘了一个前提条件：集 E 为可测集．

例如，设 E 为不可测集，$f(x)=c,x\in E$，则当 $\alpha<c$ 时，集 $E[f>\alpha]=E$ 不可测．因此由可测函数的定义知，$f(x)$ 不是 E 上的可测函数．

注 不可测集 E 上不可能有可测函数，所以在下列题目中提到的集 E，若未加说明，均指可测集．

[4.2] 已知"若 f 在 E 上可测，则 $\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$：$E[f=\alpha]$ 可测"．反之，若 $\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$：$E[f=\alpha]$ 可测，能断定 $f(x)$ 为 E 上的可测函数吗？

解 不能．例如：在可测集 $E=[0,1]$ 上取一个不可测子集 E_1（上一章已证明：任一正测度集必有不可测子集）．作函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in E_1\\ -x. & x\in E-E_1\end{cases}$$

显然 $\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$：$E[f=\alpha]$ 为空集或单点集，从而可测．

但因 $E[f>0]=E_1$ 不可测，所以 f 不是 E 上的可测函数．

[4.3] 从函数 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 可测能否推出 $f(x)$ 也可测？

解 不能．设 E_1 是 $[0,1]$ 中的不可测子集，而令

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in E_1\\ -1. & x\in[0,1]-E_1\end{cases}$$

则因 $E[f>0]=E_1$ 是不可测集，可知 f 不是 $[0,1]$ 上的可测函数．然而

$$f^2(x)=|f(x)|\equiv 1,x\in[0,1]$$

为可测函数．

[4.4] 由 $f(x)\pm g(x)$ 可测能否推出 $f(x)$、$g(x)$ 都可测？

解 不能.例如,取 E_1 为[0,1]的一个不可测子集,而取

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in E_1\\ -1. & x\in[0,1]-E_1;\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}-1, & x\in E_1\\ 1, & x\in[0,1]-E_1.\end{cases}$$

则 $f(x)+g(x)\equiv 0, x\in[0,1]$,从而 $f+g$ 为[0,1]上的可测函数.然而 f、g 都不是[0,1]上的可测函数.

[4.5] 能否断定"零测集上任何函数均可测"?

解 能断定.证明如下:

设 $mE=0$,$f(x)$ 定义于 E,则 $\forall\ \alpha\in\mathbf{R}^1$,因

$$E[f>\alpha]\subseteq E.$$

所以 $mE[f>\alpha]=0$,即 $E[f>\alpha]$ 可测(零测集的任一子集可测且测度为零).

故 f 在 E 上可测.

[4.6] 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列,能否断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 为 E 上的可测函数?

解 能断定.证明如下:

先证 $\forall$ 正整数 n,有

$$\sum_{i=1}^{n}f_i(x)$$

在 E 上可测.

当 $n=1$ 时,f_1 在 E 上可测.

设当 $n=k$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{k}f_i(x)$ 在 E 上可测.则当 $n=k+1$ 时,

$$\sum_{i=1}^{k+1}f_i=\sum_{i=1}^{k}f_i+f_{k+1}(x)$$

由 $\sum\limits_{i=1}^{k}f_i$ 及 $f_{k+1}(x)$ 都在 E 上可测,所以根据可测函数的运算性质知

$$\sum_{i=1}^{k+1}f_i(x)$$

在 E 上可测.

故由数学归纳法原理知 $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ 在 E 上可测.

再证 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 可测.

令
$$F_n=\sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$
则 $\{F_n(x)\}$ 为 E 上的可测函数列,且 $\{F_n(x)\}$ 有极限
$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x).$$
然而我们知道可测函数列的极限函数是可测的.

故 $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)=\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ 在 E 上可测.

[4.7] 由 $f(x)$ 在 $E_k(k=1,2,\cdots)$ 上可测能推出 $f(x)$ 在 $E=\sum_{k=1}^{\infty} E_k$ 上可测吗?

解 答案是肯定的.

因 f 在 E_k 上可测,所以 E_k 必可测($k=1,2,\cdots$). 于是
$$E=\sum_{k=1}^{\infty} E_k$$
为可测集.

而 $\forall\ \alpha\in \mathrm{R}^1$,有
$$E[f>\alpha]=\sum_{k=1}^{\infty} E_k[f>\alpha]$$
为可测集(因每个 $E_k[f>\alpha]$ 可测).

故 $f(x)$ 在 E 上可测.

注 1° 在题设条件下,类似地可证 $f(x)$ 在 $\prod_{k=1}^{\infty} E_k$、E_1-E_2、$E_1\triangle E_2$ 上亦可测.

2° 由可测函数的性质知,f 在 E 上可测,便有 $f(x)$ 在 E 的每个可测子集上可测,即若 f 在 E 上可测.

而
$$E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k,$$
其中 E_k 可测，则 f 在 E_k 上可测($k=1,2,\cdots$).

结合本题便有下述结论：

若 $E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k$，E_k 可测($k=1,2,\cdots$)，则 f 在 E 上可测的充要条件是 f 在每个 E_k 上可测.

3° 若 f 在 E 上可测，$E=\sum E_k$(E_k 不一定都可测)，则 f 不一定在每个 E_k 上可测. 当 E_{k_0} 不可测时，f 在 E_{k_0} 上就不可能是可测函数.

[4.8] 设 E 是一个孤立点集，问 E 上的任意一个函数是否连续？是否一致连续？

解 孤立点集 E 上的任一函数都是连续函数，但不一定一致连续. 事实上，设 $\forall\ x_0\in E$，可证 f 在 x_0 处连续：

$\because$ $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使 $E\cap N(x_0,\delta)=\{x_0\}$(因 E 是孤立点集)，且当 $x\in E\cap N(x_0,\delta)$ 时，有
$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x_0)-f(x_0)|=0<\varepsilon.$$
$\therefore$ $f(x)$ 在 E 上连续.

但 f 不一定一致连续. 举例如下：设
$$E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\};$$
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=n(n=1,2,\cdots).$$
因 $\exists\ \varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall\ \delta>0$，当 $\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|<\delta$ 时有
$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|=|n-(n+1)|=1>\varepsilon_0.$$
故 f 在 $E=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots\right\}$ 上不是一致连续的.

[4.9] 叶果洛夫定理中的条件"$mE<+\infty$"是否可以取消？

解 不能取消. 举反例如下：

设 $E=[0,+\infty)$，则 $mE=+\infty$，作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,n]\\ 1. & x\in(n,+\infty)\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots)$$

则有 f_n 可测，且 $f_n(x)\to 0(n\to\infty)$（事实上，$\forall\ x_0\in E$，存在自然数 $N>x_0$，当 $n\geqslant N$ 时 $f_n(x_0)=0$）.

然而，$\exists\ \delta_0=\dfrac{1}{2}>0$，$\forall$ 可测集 $e\subseteq E$，只要 $me<\delta_0<1$，在 $E-e$ 上便有：

对于 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}>0$，$\forall$ 自然数 N，$\exists\ n,n+1>N$（如取 $n=N+1$），当 $x\in(E-e)\cap[n,n+1]\neq\varnothing$ 时：

$$|f_n(x)-f_{n+1}(x)|=1>\varepsilon_0.$$

即 f_n 在 $E-e$ 上非一致收敛. 故叶果洛夫定理不能推广至 $mE=+\infty$的情形.

[4.10] 叶果洛夫定理的结论能否改为"$\exists\ e\subseteq E$，$me=0$，使 $\{f_n\}$ 在 $E-e$ 上一致收敛于 $f(x)$"？

解 不能改. 反例如下：取 $E=[0,1]$，作函数（如图 4—2）

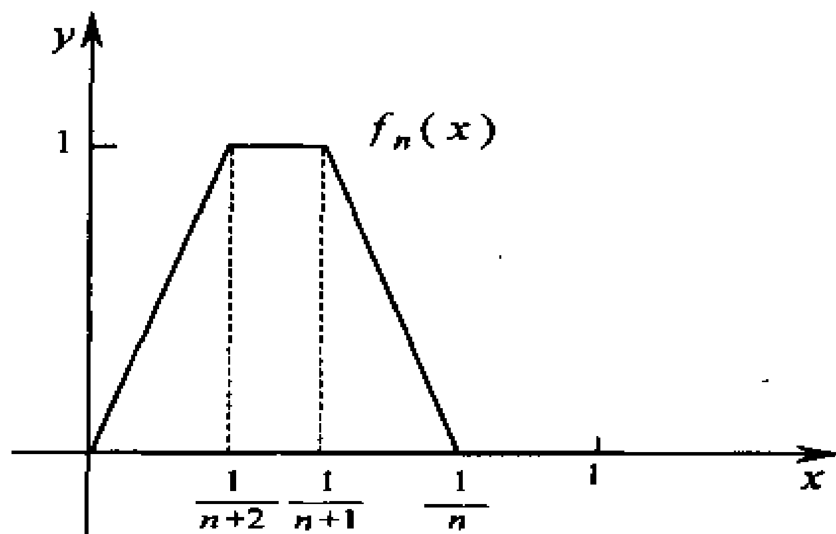


图 4—2

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\(n+2)x, & 0<x<1/(n+2)\\1, & 1/(n+2)\leqslant x<1/(n+1)\\1-n(n+1)\left(x-\dfrac{1}{n+1}\right), & 1/(n+1)\leqslant x<1/n\\0. & 1/n\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

易知 $f_n(x)$ 是 $E=[0,1]$ 上的连续函数，所以是可测的，且 $\forall\ x\in E$:

$$f_n(x)\to 0=f(x)\,(n\to\infty).$$

下证，$\forall\ e\subseteq E, me=0$，但 $\{f_n\}$ 在 $E-e$ 上非一致收敛于 0.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}>0$，$\forall$ 自然数 N，$\exists\ n=N+1>N$，

令
$$E_1=\left[\frac{1}{N+3},\frac{1}{N+2}\right)-e$$

由 $me=0$ 得 $E_1\neq\varnothing$，取 $x_0\in E_1\subseteq E-e$，有

$$|f_n(x_0)-0|=|f_{N+1}(x_0)-0|=1>\varepsilon_0.$$

故 $\{f_n\}$ 在 $E-e$ 上非一致收敛.

[4.11] 叶果洛夫定理的逆命题是否成立？即是否有："设 $\{f_n\}$ 为 E 上的可测函数列，且 $f_n\xrightarrow{a.u.}f$，则 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ 于 E."？

解 能成立. 证明如下：

设 $f_n\xrightarrow{a.u.}f$，则对 $\delta_n=\dfrac{1}{n}>0$（n 为自然数），$\exists\ e_n\subseteq E$，使 $me_n<\dfrac{1}{n}=\delta_n$，而在 $E-e_n$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

令 $e=\prod\limits_{n=1}^{\infty}e_n$，则 $me\leqslant me_n<\dfrac{1}{n}$（$\forall$ 自然数 n）.

由于上式对任意自然数 n 都成立，取极限便得

$$me=0.$$

下面只要证，对 $\forall\ x_0\in E-e$ 均有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$$

即可.

当 $x_0 \in E-e$ 时，有 $x_0 \notin e=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} e_n$，于是$\exists$ n_0(自然数)：$x_0 \notin e_{n_0}$，即 $x_0 \in E-e_{n_0}$.
因为

$$f_n \xrightarrow{\text{一致}} f \text{ 于 } E-e_{n_0},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=f(x_0) \quad (\forall\ x_0 \in E-e)$$

故在 $E-e$ 上，$f_n \longrightarrow f$ 而 $me=0$. 即

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \text{ 于 } E.$$

注 以上证明过程不要求 $mE<+\infty$，所以虽然叶果洛夫定理当 $mE=+\infty$时不成立，但其逆命题当 $mE=+\infty$时是正确的.

[4.12] 鲁金定理结论中的 δ 能否取为 0，即结论能否表述为："$\exists$ 闭集 $F \subseteq E$，使 $m(E-F)=0$，且 f 在 F 上连续."？

解 不能. 例如，取 $E=[0,1]$，而 E_1 是[0,1]中的一个测度为$\frac{1}{2}$的疏朗完备集. 作函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in E_1.\\ 0. & x\in E-E_1.\end{cases}$$

则 $f(x)$是 E 上的简单函数，从而 f 在 E 上是可测的. 然而在 E 中去掉任一零测集 E_0，f 都不能在 $F=E-E_0$ 上连续.

事实上，由 $mE_1=\frac{1}{2}>0=mE_0$ 知，$E_1-E_0\neq\varnothing$，从而可取

$$x_0\in E_1-E_0\subseteq E-E_0=F.$$

则 $f(x_0)=1$；又由 $E-E_0$ 在[0,1]中稠密知，

$$\forall\ \delta>0, \exists\ x_1\in(E-E_1)\cap(x_0-\delta,x_0+\delta): f(x_1)=0.$$

即对 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，

$$\exists\ x_0\in F, \forall\ \delta>0, \exists\ x_1\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

使得

$$|f(x_0)-f(x_1)|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

故　f 在 x_0 处不连续，也就是说 f 不是 $E-E_0$ 上的连续函数.

[4.13]　当 $mE=+\infty$时鲁金定理是否仍然成立?

解　答案是肯定的，即鲁金定理中条件“$mE=+\infty$”可以取消. 证明如下：

设 $mE=+\infty$，而 f 在 E 上可测. 令

$$E_n=E\cap(n,n+1],(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

则 $E=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E_n$，$\{E_n\}$两两不交，每个 E_n 可测，且

$$mE_n\leqslant1<+\infty.$$

我们知道，当 E 分解为可测集之并时，f 仍在每个 E_n 上可测. 于是由鲁金定理，存在闭集

$$F_n\subseteq E_n\cup E_{-n}\subseteq(-n,-n+1]\cup(n,n+1],$$

使 f 在 F_n 上连续($n=0,1,2,\cdots$)，且

$$m[(E_n\cup E_{-n})-F_n]<\delta/2^{n+1},$$

其中 δ 为任意正数.

显然诸 F_n 互不相交. 令

$$F=\sum_{n=0}^{\infty}F_n,$$

则 $F\subseteq E$，且

$$\begin{aligned}m(E-F)&=m(\sum_{n=-\infty}^{\infty}E_n-\sum_{n=0}^{\infty}F_n)\\&=m(\sum_{n=0}^{\infty}(E_n\cup E_{-n})-\sum_{n=0}^{\infty}F_n)\\&=m\sum_{n=0}^{\infty}(E_n\cup E_{-n}-F_n)\\&\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}m[(E_n\cup E_{-n})-F_n]\\&<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta}{2^{n+1}}=\delta.\end{aligned}$$

以下只需证 F 为闭集及 f 在 F 上连续：

(i) F 为闭集.

设 $x_0\in F'$,因 $x_0\in \mathrm{R}^1$,所以有唯一整数 n 使 $x_0\in(n,n+1]$,而 $F_{n+1}\subseteq(n+1,n+2]$且 F_{n+1}为闭集,于是 $x_0\notin F_{n+1}$,故$\exists\ \delta_1>0$,使

$$(x_0,x_0+\delta_1)\cap F_{n+1}=\varnothing.$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,x_0-n\}$,则有

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap F_{n\pm1}=\varnothing,(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap F_n\neq\varnothing.$$

又因 $x_0\in F'$,则应

$\exists\ \{x_k\}\subseteq F\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)=F_n\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq F_n$,

使 $x_k\to x_0(k\to\infty)$,而 F_n 为闭集.

$\therefore\quad x_0\in F'_n\subseteq F_n$.

故 $\quad x_0\in F_n\subseteq F$,即 $F'\subseteq F$,亦即 F 为闭集.

(ii) $f(x)$在闭集 F 上连续.

$\forall\ x_0\in F$,存在唯一 $n:x_0\in F_n$. 设$\{x_k\}$为任一收敛于 x_0 的点列,则由上述证明知$\{x_k\}$至多有限项不属于 F_n,即存在自然数 N_0,当 $k>N_0$ 时,$x_k\in F_n\subseteq F$,而 f 在 F_n 上连续,所以有

$$f(x_k)\to f(x_0)\ \ (k\to\infty).$$

故 $\quad f$ 在 F 上连续.

综上所述,鲁金定理当 $mE=+\infty$时亦成立.

[4.14] 鲁金定理的逆命题是否成立?即是否有下述命题:"设 $f(x)$为可测集 E 上几乎处处有限的函数,若$\forall\ \varepsilon>0$,存在闭集 $F\subseteq E$ 使 $m(E-F)<\varepsilon$,且 f 在 F 上连续,则 f 在 E 上可测."?

解 鲁金定理的逆命题是正确的. 证明如下:

由假设,对 $\varepsilon_n=1/n>0$,应存在闭集 $F_n\subseteq E$,使

$$m(E-F_n)<1/n,$$

且 f 在 F_n 上连续. 令

$$F_0=\sum_{n=1}^{\infty}F_n,$$

$$E_1=E-F_0=E\cap\varphi\sum_{n=1}^{\infty}F_n=\prod_{n=1}^{\infty}(E-F_n)$$

由于$\prod_{n=1}^{k}(E-F_n)\supset\prod_{n=1}^{k+1}(E-F_n)$ $(k=1,2,\cdots)$，单减．
于是有

$$mE_1=\lim_{n\to\infty}m(E-F_n)=0,$$

即 E_1 为零测集．

而对$\forall\ \alpha\in R^1$，因 f 在 F_n 上连续，所以有

$$F_n[f(x)\geqslant\alpha]$$

是闭集．
所以

$$F_0[f(x)\geqslant\alpha]=\sum_{n=1}^{\infty}F_n[f(x)\geqslant\alpha]$$

是可测集．

又　$E_1[f\geqslant\alpha]$是零测集，所以有

$$E[f\geqslant\alpha]=F_0[f(x)\geqslant\alpha]\cup E_1[f(x)\geqslant\alpha]$$

可测．

故　$f(x)$在 E 上可测．

[4.15]　鲁金定理能否改为："f 为 E 上几乎处处有限的可测函数，则$\forall\ \delta>0$，存在闭集 $F\subseteq E$，使 $m(E-F)<\delta$，且 f 在 F 上可表为多项式"？

解　不能改．证明如下：

取 $E=[0,1]$，$f(x)=e^x$，f 显然是 E 上的有限可测函数．假定对于 $\delta_0=\frac{1}{2}>0$，存在闭集 $F\subseteq E$，使 $m(E-F)<\frac{1}{2}$，即 $mF>\frac{1}{2}$；而且 $f(x)\equiv P_n(x)(x\in F)$其中 $P_n(x)$是某个 n 次多项式，即

$$f(x)-P_n(x)\equiv 0,x\in F.$$

此式说明，F 的每个点（F 显然为无限点集）都是 $f(x)-P_n(x)$的零点，即 $f-P_n$ 有无穷多个零点．

另一方面，由于$[e^x-P_n(x)]^{(n+1)}=e^x$ 无零点，所以 $f(x)-P_n(x)=e^x-P_n(x)$至多有 $n+1$ 个零点．

这一矛盾说明鲁金定理中的"连续函数"不能改为"多项式"．

[4.16] 试作 $E=[0,1]$上的可测函数 $f(x)$，使对任何连续函数 $g(x)$都有 $mE[f\neq g]\neq 0$. 此结果与鲁金定理有无矛盾？

解 作函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1]\\ +\infty, & x=0\end{cases}$$

则显然 $f(x)$是 $E=[0,1]$上的可测函数.

设 $g(x)$是 $E=[0,1]$上任一连续函数，则 $g(x)$在 E 上有界. 于是$\exists\ N>0$，使 $|g(x)|\leqslant N$，$x\in[0,1]$. 而在$[0,1/N)$上，$f(x)>N$，所以有

$$f(x)\neq g(x),x\in[0,1/N).$$

从而

$$mE[f\neq g]=m[0,1/N)=1/N>0.$$

这就是说，E 上任一连续函数 $g(x)$都有

$$mE[f\neq g]\neq 0.$$

此结果与鲁金定理并不矛盾. 事实上，$\forall\ \varepsilon>0$，可取闭集 $F=\left[\dfrac{\varepsilon}{2},1\right]\subseteq E$，$m(E-F)=\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，而所作的函数 $f(x)$在 F 上显然是连续的.

注 此题与题[4.12]结合起来更能说明鲁金定理的结论中 δ 的问题，即 $\delta>0$ 可以任意小，但 δ 不能等于 0.

[4.17] 勒贝格收敛定理：

$$\text{“若 } f_n\xrightarrow[(mE<+\infty)]{a.e.}f\text{ 于 }E\text{，则 }f_n\Rightarrow f.\text{”},$$

当 $mE=+\infty$时是否成立？

解 答案是否定的. 如取 $E=(0,+\infty)$，令

$$f_n(x)=\chi_{(0,n]}(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in(0,n]\\ 0. & \text{当 } x\in E-(0,n]\end{cases}$$

则

$$f_n(x)\to f(x)\equiv 1,x\in E.$$

但是，当取 $\sigma=\frac{1}{2}>0$ 时，有

$$mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]=m(n,+\infty)=+\infty.$$

故 $f_n \not\Rightarrow f$.

[4.18] 在可测集 E 上，若 $f_n \Rightarrow f$，是否必有

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \text{ 于 } E?$$

解 否. 例如，取 $E=[0,1)$，令 $f(x)\equiv 0$，而

$f_1^1(x)=1, x\in E$;

$f_1^2(x)=\chi_{[0,\frac{1}{2})}$，$f_2^2(x)=\chi_{[\frac{1}{2},1)}$;

……………

$f_1^k(x)=\chi_{[0,\frac{1}{k})}, f_2^k(x)=\chi_{[\frac{1}{k},\frac{2}{k})},\cdots,f_k^k(x)=\chi_{[\frac{k-1}{k},1)}$.

……………

即 $$f_i^k(x)=\chi_{[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k})}.\ (i=1,2,\cdots,k;k=1,2,\cdots)$$

当 $\sigma>1$ 时，$\forall\, k,i$ 有

$$mE[|f_i^k-f|\geqslant\sigma]=m\varnothing=0.$$

当 $0<\sigma\leqslant 1$ 时，

$$E[|f_i^k-f|\geqslant\sigma]=E\left[\frac{i-1}{k}\leqslant x<\frac{i}{k}\right],$$

故 $$mE[|f_i^k-f|\geqslant\sigma]=\frac{1}{k}\to 0(k\to\infty).$$

即 $$f_i^k(x)\Rightarrow f(x)\equiv 0\ (k\to\infty).$$

然而 $\forall\, x_0\in E$，由 $f_i^k(x)$ 的作法知：有无穷多个 $f_i^k(x)$ 在 x_0 处取值 0，亦有无穷多个 $f_i^k(x)$ 在 x_0 处取值 1. 因此 $f_i^k(x)$ 在 x_0 处不收敛. 即 $f_i^k(x)$ 在 E 上处处不收敛. 故

$$f_i^k(x)\xrightarrow{a.e.}\!\!\!\!\!\!\!\!/\ \ \ f(x)\equiv 0\ (k\to\infty).$$

注 在本题中，显然可看出：

$$f_i^k(x)\xrightarrow{a.u.}\!\!\!\!\!\!\!\!/\ \ \ f(x)\equiv 0(k\to\infty).$$

所以本例亦可说明：$f_n\Rightarrow f$ 推不出 $f_n\xrightarrow{a.u.}f$.

[4.19] 问三种收敛：$f_n\xrightarrow{a.e.}f$，$f_n\xrightarrow{a.u.}f$ 和 $f_n\Rightarrow f$ 之间存

在着什么样的关系？指出根据或举出反例.

解 将所问的关系图示如下：

(i) 叶果洛夫定理的逆命题(题[4.11])，当 $mE\leqslant+\infty$ 时成立.

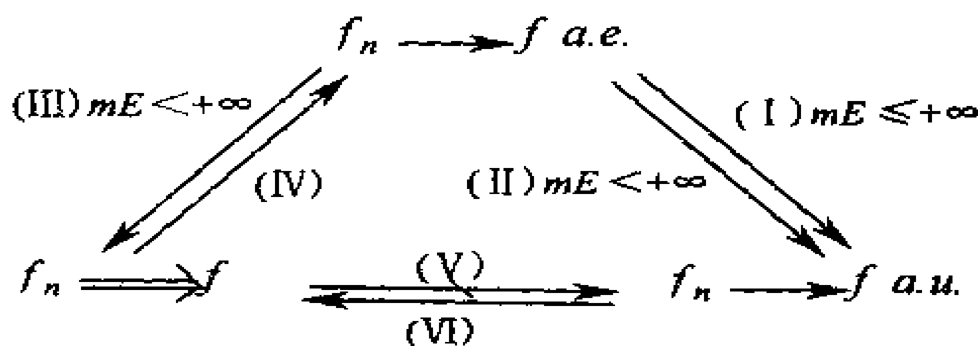


图 4—3

(ii) 著名的叶果洛夫定理. 但当 $mE=+\infty$ 时不成立，见题[4.9].

(iii) 勒贝格收敛定理. 当 $mE=+\infty$ 时不成立. 见题[4.17]. 而且即使 $mE<+\infty$，定理也不可逆. 见题[4.18].

(iv) 黎斯定理. 部分地恢复勒贝格收敛定理的可逆性.

(v) 见题[4.18]的注.

(vi) 即定理 4.5. 证明如下：

设 E 可测，$f_n\xrightarrow{a.u.}f$ 于 E，由定义，对 $\delta_k=1/k>0$，$\exists$ $E_k\subseteq E$，使 $mE_k<1/k$，而在 $E-E_k$ 上 $f_n\xrightarrow{\text{一致}}f$.

故$\forall$ $\sigma>0$，$\exists$ N(自然数)，当 $n>N$ 时，

$$|f_n-f|<\sigma, x\in E-E_k.$$

于是

$$E[|f_n-f|\geqslant\sigma]\subseteq E_k.$$

所以

$$mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]\leqslant mE_k<1/k\ (\forall\ n>N).$$

因此，由 k 的任意性得知

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]=0$$

故　$f_n \Rightarrow f$ 于 E.

(另外，由(i)、(iii)联合起来可知，当 $mE<+\infty$时，若 $f_n \xrightarrow{a.u.} f$，则 $f_n \Rightarrow f$.)

[4.20]　在数学分析里，函数列的极限具有唯一性，那么对于 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 及 $f_n \Rightarrow f$ 有无类似结果？

解　如果将几乎处处相等的两个函数看作相同的函数，则唯一性仍然成立. 即有

(i) 若 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 于 E，且 $f_n \xrightarrow{a.e.} g$ 于 E，则

$$f=g\ a.e.\ 于\ E.$$

(ii) 若 $f_n \Rightarrow f$，且 $f_n \Rightarrow g$，则 $f=g$ a.e. 于 E.

证(i)由 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$，得知$\exists$ $E_1\subseteq E$，$mE_1=0$ 使

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

对$\forall$ $x\in E-E_1$ 成立.

又由 $f_n \xrightarrow{a.e.} g$ 于 E，所以$\exists$ $E_2\subseteq E$，$mE_2=0$，使

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=g(x)$$

对$\forall$ $x\in E-E_2$ 成立.

于是有 $m(E_1\cup E_2)=0$，且在 $E-(E_1\cup E_2)$上处处成立着

$$\lim_{n\to\infty} f_n=f,\quad \lim_{n\to\infty} f_n=g.$$

故由数学分析中的结果知，对$\forall$ $x\in E-(E_1\cup E_2)$有

$$f(x)\equiv g(x),$$

即　$f(x)=g(x)$ a.e. 于 E.

证(ii) 由于

$$|f(x)-g(x)|\leqslant|f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-g(x)|.$$

所以对$\forall$ 自然数 n，有

$$E\left[|f(x)-g(x)|\geqslant\frac{1}{n}\right]\subseteq E\left[|f(x)-f_k(x)|\geqslant\frac{1}{2n}\right]$$

$$+E\left[|f_k(x)-g(x)|\geqslant\frac{1}{2n}\right]$$

从而

$$mE\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\leqslant mE\left[|f-f_k|\geqslant\frac{1}{2n}\right]+mE\left[|f_k-g|\geqslant\frac{1}{2n}\right]$$

又因
$$f_k\Longrightarrow f,f_k\Longrightarrow g(k\to\infty),$$

故令 $k\to\infty$，则

$$mE\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]=0\ (n=1,2,\cdots).$$

而

$$mE[f(x)\neq g(x)]=m\left(\sum_{n=1}^{\infty}E\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]\right)$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mE\left[|f-g|\geqslant\frac{1}{n}\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}0=0.$$

即 $f(x)=g(x)a.e.$ 于 E.

二、函数可测性的判断

[4.21] 证明

(1) 设 E 为可测集，$f(x)=c$，$x\in E$. 则 $f(x)$ 可测.

(2) 设 $\varphi(x)$ 是可测集 E 上的简单函数，则 $\varphi(x)$ 可测.

证 (1) ∵ $E[f>\alpha]=\begin{cases}\varnothing, & 若\ \alpha\geqslant c\\ E, & 若\ \alpha<c.\end{cases}$

是可测集($\alpha\in\mathrm{R}^1$).

∴ f 为 E 上的可测函数.

(2) 设

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x),x\in E=\sum_{i=1}^{n}E_i,$$

E_i 可测，且 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$E[\varphi(x)>\alpha]=\begin{cases}\varnothing, & \text{当 } \alpha\geqslant\max\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}\\ E_{i_1}+E_{i_2}+\cdots+E_{i_k}, & \text{当 } \alpha<c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_k} \text{ 而 } \\ & \alpha\geqslant \text{其余的 } c_i.\\ E. & \text{当 } \alpha<\min\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}.\end{cases}$$

由此可知，$\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$，$E[\varphi(x)>\alpha]$可测.

故 $\varphi(x)$为 E 上的可测函数.

[4.22] 讨论集 E 的特征函数 $\chi_E(x)$的可测性，其中

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0. & x\notin E\end{cases}$$

解 因为

$$E[x\mid\chi_E(x)>\alpha]=\begin{cases}\varnothing, \text{当 } \alpha\geqslant 1\\ E, \text{当 } 0\leqslant\alpha<1 (\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1)\\ \mathrm{R}^n. \text{当 } \alpha<0\end{cases}$$

所以 $E[x\mid\chi_E(x)>\alpha]$与 E 有相同的可测性. 即集 E 与 χ_E 有相同的可测性和不可测性.

注 由本题可得下列推论：

1° 狄雷克莱函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathrm{Q}\\ 0. & x\in\mathrm{R}^1-\mathrm{Q},\end{cases}\ \mathrm{Q}\text{ 是有理数集}$$

是可测函数. 因 $D(x)=\chi_{\mathrm{Q}}(x)$，而 Q 可测(零测集).

2° 结合可测函数的运算性质，可推出简单函数

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}(x)$$

(其中，$x\in E=\sum\limits_{i=1}^{n}E_i$，$E_iE_j=\varnothing(i\neq j)$. E_i 可测)为可测函数.

[4.23] 试证，黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, \text{当 } x=\dfrac{m}{n},\\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数. 且 } 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

(其中，m、$n\in\mathrm{N}$，m、n 互质且 $m\leqslant n$)

为 $E=[0,1]$上的可测函数.

证 $\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$,当 $\alpha\geqslant 1$ 时,$E=E[x\,|\,R(x)>\alpha]=\varnothing$可测;

当 $0\leqslant\alpha<1$ 时,$E[R(x)>\alpha]\subseteq Q$ 为零测集;

当 $\alpha<0$ 时,$E[R(x)>\alpha]=E=[0,1]$可测.

故 $R(x)$是 $E=[0,1]$上的可测函数.

[4.24] 设可测集 $E\subseteq\mathrm{R}^1$,则 E 上的单调函数 $f(x)$可测.

证 不妨设 $f(x)$为单调增函数,即

$$\forall\ x_1,x_2\in E,x_1<x_2:f(x_1)\leqslant f(x_2).$$

则$\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$ 有

(i) 当$\sup\limits_{x\in E}f(x)\leqslant\alpha$ 时,$E[f>\alpha]=\varnothing$;

(ii) 当$\inf\limits_{x\in E}f(x)>\alpha$ 时,$E[f>\alpha]=E$;

(iii) 当$\inf\limits_{x\in E}f(x)\leqslant\alpha<\sup\limits_{x\in E}f(x)$时,必有 $x_0\in E\cap\mathrm{R}^1$,使

$$f(x_0+0)>\alpha,f(x_0)\leqslant\alpha;$$

或

$$f(x_0)\geqslant\alpha,f(x_0-0)<\alpha.$$

由 $f(x)$的单调递增知,

$$E[f>\alpha]=E\cap(x_0,+\infty)\text{或 }E\cap[x_0,+\infty).$$

在所有情况下,$E[f>\alpha]$都可测.故 f 为 E 上的可测函数.

注 由于任一有界变差函数可以表示为二单调函数之差,所以由本题知:可测集上的有界变差函数为可测函数.

[4.25] 可测集 E 上的任一连续函数 $f(x)$是可测函数.

证 因为 E 可测,所以有 F_σ 型集 $F\subseteq E$,使 $mF=mE$.令 $E-F=N$,则 $mN=0$,从而由 F_σ 型集的定义知:存在闭集列$\{F_n\}$使 $F=\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n$.

于是$\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$:因 $E=N+F$,所以

$$E[f\geqslant\alpha]=N[f\geqslant\alpha]+\sum_{n=1}^{\infty}F_n[f\geqslant\alpha].$$

又因 f 在 E 上连续,所以 f 在诸 F_n 上连续,从而 $F_n[f\geqslant\alpha]$为闭集,则 $F_n[f\geqslant\alpha]$可测.而

$$mN[f\geqslant\alpha]\leqslant mN=0,$$

即 $N[f\geqslant\alpha]$可测.

故 $E[f\geqslant\alpha]=N[f\geqslant\alpha]+\sum_{n=1}^{\infty}F_n[f\geqslant\alpha]$可测.

即 f 是 E 上的可测函数.

[4.26] 试证,设 f、g 为 $E\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的实函数,且

$$f(x)=g(x)a.e.\text{ 于 }E$$

则 $f(x)$、$g(x)$在 E 上的可测性相同.

证 设 $E_1=E[x|f(x)\neq g(x)]$,则 $mE_1=0$,于是

$$E[f>\alpha]-E_1\subseteq E[g>\alpha]\subseteq E_1+E[f>\alpha] \qquad (*)$$

因此有

(i) 若 f 为 E 上的可测函数,则$\forall\ \alpha\in\mathbf{R}^1$,有

$E[f>\alpha]$可测,记 $mE[f>\alpha]=M_\alpha$,

由($*$)的后半关系式知

$$m^*(E[g>\alpha])\leqslant m^*E_1+m^*(E[f>\alpha])=mE[f>\alpha]=M_\alpha.$$

由($*$)的前半关系式知

$$m_*(E[g>\alpha])\geqslant m_*(E[f>\alpha]-E_1)$$
$$\geqslant m_*E[f>\alpha]-m_*E_1=mE[f>\alpha]=M_\alpha.$$

因此 $$m^*E[g(x)>\alpha]=m_*E[g>\alpha]=M_\alpha.$$

故 $E[g>\alpha]$可测,即 $g(x)$为 E 上的可测函数.

(ii) 若 f 为 E 上的不可测函数,则显然 g 必在 E 上不可测.

事实上,假若 g 在 E 上可测,由(i)可知 f 亦在 E 上可测,矛盾.

故 命题成立.

注 此题说明,在一个零测集上任意改变一个函数的定义,不影响函数的可测性.如,函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in P_0\cap E\\ x^3, & x\in[0,1]-P_0\cap E\end{cases}$$

其中 P_0 为 Cantor 集,而 E 为某个不可测集.

$\because\quad P_0\cap E\subseteq P_0$, $\therefore\quad m(P_0\cap E)=0(mP_0=0)$.

∴ $f(x)=x^3$. a. e 于[0,1].

故 $f(x)$在[0,1]上可测.

[4.27] 设$f^2(x)$是R^1上的可测函数,且点集$R^1[f(x)>0]$可测.则$f(x)$是可测函数.

证 $\forall\ \alpha\in R^1$:

(i) 若$\alpha=0$,则由题设$R^1[f>0]$可测.

(ii) 若$\alpha>0$,则$R^1[f>\alpha]=R^1[f>0]-R^1[f^2\leqslant\alpha^2]$,由于$f^2$可测,所以,$R^1[f^2<\alpha^2]$可测,从而$R^1[f>\alpha]$可测.

(iii) 若$\alpha<0$,则$R^1[f>\alpha]=R^1[f>0]\cup R^1[f^2<\alpha^2]$可测.

即$\forall\ \alpha\in R^1$,有$R^1[f>\alpha]$可测,故f在R^1上可测.

注 此题与题[4.3]相比,多了$R[f>0]$可测这个条件.请注意比较.

[4.28] 设$f(x)$定义于$[a,b]$,若对任意的$[\alpha,\beta]\subseteq(a,b)$,$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上可测,则$f(x)$是$[a,b]$上的可测函数.

证 不妨设$a<b$,显然存在自然数n_0使

$$\frac{1}{n_0}<\frac{b-a}{2}.$$

考虑闭区间$\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]$,$n=n_0,n_0+1,\cdots$.记

$$E=[a,b],E_n=\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}E_n=(a,b)=E_0.$$

由题设f在$\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]$上可测.则$E_n[f>\alpha]$可测.

因此,$\forall\ \alpha\in R^1$,有$E_0[f>\alpha]=\sum_{n=n_0}^{\infty}E_n[f>\alpha]$可测.即$f$在$(a,b)$上可测.但$(a,b)$与$[a,b]$只差一个零测集$\{a,b\}$.

故 f在$[a,b]$上可测.

[4.29] 设$f(x)$是$[a,b]$上的可微函数,则$f'(x)$在$[a,b]$上可测.

证 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微. 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测, $f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ 在 $\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$ 上可测. 而由可微性概念知

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}},$$

于是, 作函数列 $\{\varphi_n\}$:

$$\varphi_n(x)=\frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}},$$

则 $\varphi_n(x)$ 在 $\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$ 上可测, 且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f'(x).$$

因此 $\forall\ n>\frac{1}{b-a}$, 必有 $f'(x)$ 在 $\left[a,b-\frac{1}{n}\right]$ 上可测.

故 $f'(x)$ 在 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[a,b-\frac{1}{n}\right]=[a,b)$ 上可测, 即 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可测.

[4.30] 试证, 设 $f_1(x)$ 是 $E_1\subseteq R^m$、$f_2(y)$ 是 $E_2\subseteq R^n$ 上的可测函数, 则 $f_1(x)\cdot f_2(y)$ 是 $E_1\times E_2$ 上的可测函数.

证 由题设可知, E_1,E_2 可测, 于是 $E=E_1\times E_2$ 为可测集. $(E_1\times E_2\subseteq R^m\times R^n)$.

作函数

$F_1(x,y)=f_1(x), F_2(x,y)=f_2(y). (x,y)\in E_1\times E_2=E.$

若能证得 F_1,F_2 都为 $E_1\times E_2$ 上的可测函数, 则有 $f_1(x)\cdot f_2(y)=F_1(x,y)\cdot F_2(x,y)$ 是 $E_1\times E_2$ 上的可测函数. 下面证明这一点.

先证一个等式: $\forall\ \alpha\in R^1$,

$$E[F_1>\alpha]=E_1[f_1(x)>\alpha]\times E_2.$$

事实上，$\forall\ (x,y)\in E[F_1>\alpha]\Longleftrightarrow$

$(x,y)\in E=E_1\times E_2$，且 $F_1(x,y)=f_1(x)>\alpha$.

$\Longleftrightarrow x\in E_1, y\in E_2$，且 $f_1(x)>\alpha$.

$\Longleftrightarrow x\in E_1[f>\alpha]$且 $y\in E_2$.

即
$$(x,y)\in E_1[f_1>\alpha]\times E_2.$$

故
$$E[F_1(x,y)>\alpha]=E_1[f_1(x)>\alpha]\times E_2.$$

由 $f_1(x)$在 E_1 上可测知，$E_1[f_1(x)>\alpha]$为 R^m 上可测集，从而 $E_1[f_1(x)>\alpha]\times E_2$ 为 $\mathrm{R}^m\times\mathrm{R}^n$ 上的可测集.

故 $f_1(x)=F_1(x,y)$是 $E=E_1\times E_2$ 上的可测函数.

同理可知，$f_2(x)=F_2(x,y)$也是 $E=E_1\times E_2$ 上的可测函数.

因此，由可测函数的运算性质可得：$f_1(x)\cdot f_2(y)=F_1(x,y)\cdot F_2(x,y)$是 $E=E_1\times E_2$ 上的可测函数.

三、可测函数的各种性质

[4.31] 试证以下各条等价(设 E 为可测集)：

(1) f 在 E 上可测，即$\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$：$E[f>\alpha]$可测.

(2) $\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$：$E[f\geqslant\alpha]$可测.

(3) $\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$：$E[f<\alpha]$可测.

(4) $\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$：$E[f\leqslant\alpha]$可测.

(5) $\forall\ a,b\in\mathrm{R}^1, a<b$：$E[a\leqslant f<b]$可测.

证 (1)$\Longrightarrow$(2) 设$\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$，由(1)知 $E_n=E\left[f>\alpha-\frac{1}{n}\right]$为可测集，而

$$E[f\geqslant\alpha]=\prod_{n=1}^{\infty}E\left[f>\alpha-\frac{1}{n}\right].$$

所以 $E[f\geqslant\alpha]$可测.

(2)$\Longrightarrow$(3) 设 $\alpha\in\mathrm{R}^1$，由(2)知 $E[f\geqslant\alpha]$可测，但

$$E[f<\alpha]=\varphi E[f\geqslant\alpha],$$

所以 $E[f<\alpha]$可测.

(3)$\Longrightarrow$(4)：对$\forall\ \alpha\in\mathrm{R}^1$，由(3)知 $E\left[f<\alpha+\frac{1}{n}\right]$可测，于是

$$E[f\leqslant \alpha]=\prod_{n=1}^{\infty}E\left[f<\alpha+\frac{1}{n}\right]\text{可测}.$$

(4)$\Longrightarrow$(5) 设 a、$b\in \mathrm{R}^1$，$a<b$，则由(4)知

$$E[f<b]=\sum_{n=1}^{\infty}E\left[f\leqslant b-\frac{1}{n}\right]\text{可测}.$$

$$E[f<a]=\sum_{n=1}^{\infty}E\left[f\leqslant a-\frac{1}{n}\right]\text{可测}.$$

$\therefore$ $E[a\leqslant f<b]=E[f<b]-E[f<a]$可测.

(5)$\Longrightarrow$(1) 设 $\alpha\in \mathrm{R}^1$，由(5)知

$$E\left[\alpha+\frac{1}{n}\leqslant f<\alpha+n\right]\text{可测}.(\forall\ n\in \mathrm{N})$$

则 $E[f>\alpha]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E\left[\alpha+\frac{1}{n}\leqslant f<\alpha+n\right]$可测.

[4.32] 试证，f 在 E 上可测的充要条件是：$\forall\ r\in D\subseteq \mathrm{R}^1$，$\overline{D}=\mathrm{R}^1$（即 D 为 R^1 的稠密子集，特别地，D 可以是有理数集 Q）均有 $E[f>r]$可测.

证 必要性显然. 因为 $D\subseteq \mathrm{R}^1$，$f(x)$在 E 上可测，故对$\forall\ \alpha\in \mathrm{R}^1$有 $E[f>\alpha]$可测，从而对$\forall\ r\in D$，也有 $E[f>r]$可测.

充分性 设$\forall\ r\in D\subseteq \mathrm{R}^1$，$\overline{D}=\mathrm{R}^1$，有 $E[f>r]$可测，则对任一实数 α，$\exists\ \{r_k\}\subseteq D$，$r_k>\alpha$ 使 $r_k\to\alpha(k\to\infty)$.

于是

$$E[f>\alpha]=\sum_{k=1}^{\infty}E[f>r_k]. \qquad (*)$$

事实上，若 $x\in E[f>\alpha]\Longrightarrow f(x)>\alpha$，所以$\exists\ r_k$ 使 $\alpha<r_k<f(x)$. 即 $x\in E[f>r_k]$

故
$$E[f>\alpha]\subseteq\sum_{k=1}^{\infty}E[f>r_k].$$

若 $x\in\sum\limits_{k=1}^{\infty}E[f>r_k]$，则$\exists\ k_0$ 使 $x\in E[f>r_{k_0}]$，所以 $f(x)>r_{k_0}>\alpha$，即 $x\in E[f>\alpha]$. 故($*$)式成立.

因每个 $E[f>r_k]$可测，故由（*）式知 $E[f>\alpha]$可测，即 f 在 E 上可测.

［4.33］ 试证，f 为 E 上的可测函数的充要条件是：存在简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$，使

$$\varphi_n(x) \longrightarrow f(x)\ (n\to\infty).$$

证 充分性 设$\{\varphi_n(x)\}$是简单函数列，且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x).$$

则由 φ_n 可测及可测函数列的极限函数必可测知，$f(x)$为 E 上的可测函数.

必要性 设 f 为 E 上的可测函数，令

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)>0\\ 0. & f(x)\leqslant 0,\end{cases}\quad f^-(x)=\begin{cases}-f(x), & f(x)<0\\ 0. & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

则 $f^+(x)$，$f^-(x)$都是 E 上的非负可测函数. 事实上

$$E[f^+>\alpha]=\begin{cases}E[f>\alpha], & \alpha\geqslant 0\\ E. & \alpha<0.\end{cases}$$

$$E[f^->\alpha]=\begin{cases}E[f<-\alpha], & 当\ \alpha\geqslant 0\\ E. & 当\ \alpha<0.\end{cases}$$

由 f 可测知 $E[f^+>\alpha]$、$E[f^-<\alpha]$可测.

下面先证明一个引理.

引理 设 f 为 E 上的非负可测函数，则存在简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$，使 $\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)\ (n=1,2,\cdots)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x).$$

证

$$令\ E_{n,k}=E\left[x\,\Big|\,\frac{k-1}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k}{2^n}\right].$$

$$E_{n,n2^n+1}=E[x\,|\,f(x)\geqslant n].$$

（其中，$k=1,2,\cdots,n\cdot 2^n$；$n=1,2,\cdots$）

由于 $f(x)$是可测函数，故诸 $E_{n,k}$均为可测集，且

$$E=\sum_{k=1}^{n\cdot 2^n+1}E_{n,k}.$$

作函数列

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{2^n}, & x\in E_{n,k}(k=1,2,\cdots,n2^n)\\ n, & x\in E_{n,n2^n+1}\end{cases}$$

则 $\varphi_n(x)$ 为非负简单函数，且 $\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)$. 下证 $\varphi_n(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$ 对任意 $x\in E$ 成立.

(i) 若 $f(x_0)<+\infty$，则存在自然数 n，使 $f(x_0)<n$. 从而 $x_0\notin E_{n,n2^n+1}$，于是∃ k_n，$0\leqslant k_n\leqslant n2^n$，使 $x_0\in E_{n,k_n}$，
因而

$$\frac{k-1}{2^n}\leqslant f(x_0)\leqslant\frac{k}{2^n}.$$

故　$0\leqslant f(x_0)-\varphi_n(x_0)<1/2^n$ 对一切 $n'>n$ 成立.

因此　$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0).$$

(ii) 若 $f(x_0)=\infty$，则对∀ n，$f(x_0)>n$，从而 $x_0\in E_{n,n2^n+1}$. 而此时 $\varphi_n(x_0)=n$，$x_0\in E_{n,n2^n+1}$.

故　$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0).$$

这就证得，∀ $x\in E$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$. 引理证完.

现回证本题：因 f 可测，所以 f^+、f^- 非负可测，于是由引理，有简单函数列 $\{\varphi_n^+\}$、$\{\varphi_n^-\}$ 使

$$\varphi_n^+\leqslant\varphi_{n+1}^+(n=1,2,\cdots)\text{ 且 }\varphi_n^+\longrightarrow f^+(n\to\infty),$$
$$\varphi_n^-\leqslant\varphi_{n+1}^-(n=1,2,\cdots)\text{ 且 }\varphi_n^-\longrightarrow f^-(n\to\infty).$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f^+-f^-=\lim\varphi_n^+-\lim\varphi_n^-\\&=\lim(\varphi_n^+-\varphi_n^-)\end{aligned}$$

令　$\varphi_n(x)=\varphi_n^+-\varphi_n^-(x)$，即完成了本题证明.

注　本题说明，对任何可测函数，可以用简单函数来作为它的一种逼近. 而简单函数是一种比较容易了解的函数，所以本题作法是通过简单实例来探讨复杂问题的一个很好例子.

[4.34]　证明，设 f 为 E 上的可测函数，则 $E[f=a]$ $(a\in\mathbf{R}^1)$. $E[f<\infty]$、$E[f=+\infty]$、$E[f>-\infty]$ 和 $E[f=-\infty]$ 都是可

测集.

证 因 f 为 E 上的可测函数，则有$\forall\ \alpha\in\mathbf{R}^1$：$E[f>\alpha]$、$E[f\geqslant\alpha]$、$E[f<\alpha]$及 $E[f\leqslant\alpha]$都可测.

于是

$$E[f=\alpha]=E[f\geqslant\alpha]\cap E[f\leqslant\alpha];$$

$$E[f<\infty]=\sum_{n=1}^{\infty}E[f<n];$$

$$E[f=+\infty]=E-E[f<+\infty];$$

$$E[f>-\infty]=\sum_{n=1}^{\infty}E[f>-n];$$

$$E[f=-\infty]=E-E[f>-\infty].$$

均可测.

故 命题成立.

[**4.35**] 试证：(1) 若 f 在 E 上可测，E_1 为 E 的可测子集，则 f 在 E_1 上可测.

(2) 若 f 在 E_1、E_2 上可测，则 f 在 $E=E_1\cup E_2$ 上可测.

证 (1) $\forall\ \alpha\in\mathbf{R}^1$：$E_1[f>\alpha]=E_1\cap E[f>\alpha]$，由题设知 E_1 可测. 而 f 在 E 上可测，所以 E_1 与 $E[f>\alpha]$均可测. 故 $E_1[f>\alpha]$可测. 即 f 在 E_1 上可测.

(2) 记 $E=E_1\cup E_2$，则$\forall\ \alpha\in\mathbf{R}^1$，有

$$E[f>\alpha]=E_1[f>\alpha]\cup E_2[f>\alpha].$$

由 f 在 E_i 上可测知 $E_i[f>\alpha]$可测$(i=1,2)$.

所以 $E[f>\alpha]$可测. 故 f 在 $E=E_1\cup E_2$ 上可测.

[**4.36**] 设 E 为可测集，则有

(1) f 在 E 上可测$\Longleftrightarrow\forall$ 开集 $G\subseteq\mathbf{R}^1$：

$f^{-1}(G)=E[x\mid f(x)\in G]$可测.

(2) f 在 E 上可测$\Longleftrightarrow\forall$ 闭集 $F\subseteq\mathbf{R}^1$：

$f^{-1}(F)=E[x\mid f(x)\in F]$可测.

(3) f 在 E 上可测$\Longleftrightarrow\forall$ G_δ 型集(或 F_σ 型、或 Borel 集)

$M\subseteq\mathbf{R}^1$：$f^{-1}(M)=E[x\mid f(x)\in M]$可测.

证 (1) "$\Longleftarrow$"设对任一开集 $G\subseteq \mathbf{R}^1$ 都有 $E[x\mid f(x)\in G]$可测. 则$\forall\ \alpha\in\mathbf{R}^1$,取开集$(\alpha,+\infty)=G_\alpha$,由于

$$f(x)\in G_\alpha=(\alpha,+\infty)\Longleftrightarrow f(x)>\alpha,$$

于是,$f^{-1}(G)=E[x\mid f(x)\in(\alpha,+\infty)]=E[f>\alpha]$可测($\forall\ \alpha\in\mathbf{R}^1$).

故 由可测函数的定义知 f 在 E 上可测.

"$\Longrightarrow$"设 f 为 E 上的可测函数,而 G 为 $\mathbf{R}^1$ 中任一开集. 由开集的构造定理知,存在一列互不相交的构成区间:$(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n),\cdots$使

$$G=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n).$$

而由 f 可测可得

$$\begin{aligned}f^{-1}[(a_n,b_n)]&=E[a_n<f<b_n]\\&=E[f<b_n]-E[f\leqslant a_n]\end{aligned}$$

可测.

$$\text{故}\quad \begin{aligned}f^{-1}(G)&=f^{-1}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\Big]\\&=\sum_{n=1}^{\infty}f^{-1}[(a_n,b_n)]\end{aligned}$$

可测.

(2) "$\Longleftarrow$"设对任意闭集 F,$E[f(x)\in F]$可测,那么$\forall\ \alpha\in\mathbf{R}^1$,取闭集 $F_\alpha=[\alpha,+\infty)$,则有

$$E[f(x)\geqslant\alpha]=E[f(x)\in F_\alpha]\quad(\forall\ \alpha\in\mathbf{R}^1)$$

可测.

因此 f 在 E 上可测.

"$\Longrightarrow$"设 $f(x)$ 为 E 上的可测函数,而 F 为 $\mathbf{R}^1$ 中的闭集. 由闭集的构造知,F 是由 $\mathbf{R}^1$ 去掉一个开集而成,所以 F 是由至多可列个孤立点及至多可列个闭区间之并集所组成,即 F 可表为

$$F=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\quad(-\infty\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant+\infty)$$

而对每个$[a_n,b_n]$，由 f 可测可得

$$f^{-1}([a_n,b_n])=E[a_n\leqslant f(x)\leqslant b_n]$$
$$=E[f\leqslant b_n]-E[f<a_n]$$

可测.

故

$$f^{-1}(F)=E[f(x)\in F]=E\left(f(x)\in\sum_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}E[a_n\leqslant f(x)\leqslant b_n]$$

可测.

(3) "$\Longleftarrow$"设对任一 G_δ 型集 M，$f^{-1}(M)=E[f(x)\in M]$可测，则$\forall\ \alpha\in\mathbf{R}^1$：$(\alpha,+\infty)=(\alpha,+\infty)\cap\mathbf{R}^1\cap\mathbf{R}^1\cap\cdots$也是 G_δ 型集，于是有

$$E[f>\alpha]=f^{-1}[(\alpha,+\infty)]$$

可测.

故 $f(x)$在 E 上可测.

"$\Longrightarrow$"设 f 为 E 上的可测函数，而 M 为 G_δ 型集，由 G_δ 型集的定义知，$\exists$ 开集列$\{G_n\}$，使

$$M=\prod_{n=1}^{\infty}G_n.$$

但由(1)，$f^{-1}(G_n)$可测. 故

$$f^{-1}(M)=\prod_{n=1}^{\infty}f^{-1}(G_n)=\prod_{n=1}^{\infty}E[f(x)\in G_n]$$

可测.

类似的方法可证 M 为 F_σ 型集或 Borel 集的情形.

[4.37] 设 f、g 为 E 上的可测函数，证明：

(1) $E[f>g]$可测；(2) $E[f\neq g]$可测.

证 (1) 设$\{r_n\}$是全体有理数组成的序列，则

$$E[f(x)>g(x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\{E[f>r_n]\cap E[g<r_n]\} \qquad (*)$$

事实上：若 $x_0\in$ 右端，则$\exists$ n_0 使

$$x_0\in E[f(x_0)>r_{n_0}]\cap E[g(x_0)<r_{n_0}]$$

所以 $f(x_0)>r_{n_0}>g(x_0)$，即 $x_0\in$ 左端；

若 $x_0\in$ 左端，则 $f(x_0)>g(x_0)$，于是在开区间$(g(x_0),f(x_0))$内至少有一个有理数 r_k，即 $f(x_0)>r_k>g(x_0)$，亦即 $x_0\in E[f>r_k]\cap E[g(x_0)<r_k]$

故 (*)式成立.

由 f、g 在 E 上可测可知 $E[f>r_n]$和 $E[g<r_n]$可测($\forall$ 有理数 $r_n\in\{r_n\}$)，故

$$E[f>g]=\sum_{n=1}^{\infty}\{E[f>r_n]\cap E[g<r_n]\}\text{可测.}$$

(2) 显然 $E[f\neq g]=E[f>g]\cup E[g>f]$.

若 f、g 在 E 上可测，则由(1)知 $E[f>g]$及 $E[g>f]$可测，故 $E[f\neq g]$可测.

注 显然 $E[f=g]=E-E[f\neq g]$亦可测.

[4.38] 设 f、g 为 E 上的可测函数，证明下列函数都在 E 上可测：

(1) $af(x)+bg(x)$(a，b 为常数)；

(2) $f(x)\cdot g(x)$；

(3) $|f(x)|$；

(4) $f(x)/g(x)$($g\neq 0$ a.e 于 E)；

(5) $\max\{f,g\}$、$\min\{f,g\}$.

证 (1) 先证，f 可测$\Longrightarrow af(x)$可测. 事实上，

当 $a=0$ 时，$af(x)\equiv 0$ 可测；

当 $a>0$ 时，$E[af>\alpha]=E[f>\frac{\alpha}{a}]$可测，即 af 可测；

当 $a<0$ 时，$E[af>\alpha]=E[f<\frac{\alpha}{a}]$可测，即 af 可测.

所以 $af(x)$在 E 上可测.

次证，f、g 可测$\Longrightarrow f+g$ 可测. 事实上，因 f、g 可测，即对任意有理数 r_n：$E[f>r_n]$、$E[g>\alpha-r_n]$都可测. 而对$\forall$ $\alpha\in\mathbb{R}^1$，易证

$$E[f+g>\alpha]=\sum_{n=1}^{\infty}\{E[f>r_n]\cap E[g>\alpha-r_n]\}.$$

所以，$E[f+g>\alpha]$可测，即 $f+g$ 可测.

综上所述，$af(x)+bg(x)$为 E 上的可测函数.

(2) 先证，f 在 E 上可测$\Longrightarrow f^2$ 在 E 上可测. 事实上，易证

$$E[f^2>\alpha]=\begin{cases}E, & \text{当 } \alpha<0\\ E[f>\sqrt{\alpha}]\cup E[f<-\sqrt{\alpha}]. & \text{当 } \alpha\geqslant 0\end{cases}$$

则由 f 可测知，f^2 可测.

于是再由 $f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]$，结合(1)及上述 f^2 可测之结论知 $f(x)\cdot g(x)$可测.

(3) 由

$$E[|f(x)|\leqslant\alpha]=\begin{cases}\varnothing, & \text{当 } \alpha<0\\ E[f(x)=0], & \text{当 } \alpha=0\\ E[-\alpha\leqslant f(x)\leqslant\alpha]. & \text{当 } \alpha>0\end{cases}$$

可知，当 f 可测时$|f(x)|$可测.

(4) 先证，g 可测$\Longrightarrow 1/g(x)$可测($g\neq 0$ $a.e.$ 于 E). 事实上，我们有

$$E\left[\frac{1}{g(x)}<\alpha\right]=\begin{cases}E\left[\frac{1}{\alpha}<g(x)<0\right], & \text{当 } \alpha<0\\ E[g(x)<0], & \text{当 } \alpha=0\\ E[g(x)<0]\cup E\left[g(x)>\frac{1}{\alpha}\right]. & \text{当 } \alpha>0\end{cases}$$

所以只要 g 可测便有 $1/g(x)$ 可测，再由 $f(x)/g(x)=f(x)\cdot(1/g(x))$即得(4).

(5) 由 f、g 可测及关系式

$$\max(f,g)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|],$$

$$\min(f,g)=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

立即得到 $\max(f,g)$及 $\min(f,g)$可测.

[4.39] 若$\{f_n(x)\}$为 E 上的可测函数列，则

(1) $\sup\limits_{n\geqslant 1}\{f_n\}$ (2) $\inf\limits_{n\geqslant 1}\{f_n\}$

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)$ (4) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)$

都是 E 上的可测函数. 特别，若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，则 $f(x)$在 E 上可测.

证 (1) 先证一个等式

$$E[\sup_{n\geqslant 1}\{f_n\}>\alpha]=\sum_{n=1}^{\infty}E[f_n>\alpha](\forall\ \alpha\in \mathrm{R}^1)$$

事实上，若 $x_0\in E[\sup\limits_{n\geqslant 1}f_n>\alpha]$，则 $\sup f_n(x_0)>\alpha$. 于是存在某个 n_0 使 $f_{n_0}(x_0)>\alpha$，即 $x_0\in\sum\limits_{n=1}^{\infty}E[f_n>\alpha]$. 所以 $E[\sup\limits_{n\geqslant 1}f_n>\alpha]\subset\sum\limits_{n=1}^{\infty}E[f_n>\alpha]$. 反之，若 $x_1\in\sum\limits_{n=1}^{\infty}E[f_n>\alpha]$，则有 n_1 使 $x_1\in E[f_{n_1}>\alpha]$，即 $f_{n_1}(x_1)>\alpha$，从而 $\sup\limits_{n\geqslant 1}f_n(x_1)>\alpha$，即有 $x_1\in E[\sup\limits_{n\geqslant 1}f_n>\alpha]$，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E[f_n>\alpha]\subset E[\sup\limits_{n\geqslant 1}f_n>\alpha]$. 故得所要证的等式.

根据这一等式，由 f_n 可测($n=1,2,\cdots$)得出 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\{f_n\}$在 E 上可测.

(2) 因为 $\inf\limits_{n\geqslant 1}f_n(x)=-\sup\limits_{n\geqslant 1}\{-f_n(x)\}$.

所以由(1)即知 $\inf\limits_{n\geqslant 1}\{f_n(x)\}$可测.

(3) 由关系式

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n(x)=\inf\limits_{k\geqslant 1}(\sup\limits_{n\geqslant k}f_n(x))$

及(1)、(2)即可得证.

(4) 由关系式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}f_n(x)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}(-f_n(x))$$

及(3)即可得证.

对于特别情形，只需注意到

$$f(x)=\lim f_n(x)=\overline{\lim} f_n(x)=\underline{\lim} f_n(x)$$

即可.

[4.40] 设$\{f_n\}$是E上的可测函数列,则其收敛点集与发散点集都是可测的.

证 显然,$\{f_n\}$的收敛点集可表示为

$$\begin{aligned}E_0&=E[x\,|\,\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)=\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)]\\&=\prod_{k=1}^{\infty}E\left[\,|\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n-\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n|<\frac{1}{k}\right].\end{aligned}$$

由f_n可测可得$\overline{\lim} f_n$及$\underline{\lim} f_n$都可测,所以

$$|\overline{\lim} f_n-\underline{\lim} f_n|$$

在E上可测.

从而,对任一自然数k,$E\left[\,|\overline{\lim} f_n-\underline{\lim} f_n|<\frac{1}{k}\right]$可测.故

$$E_0=\prod_{n=1}^{\infty}E\left[\,|\overline{\lim} f_n-\underline{\lim} f_n|<\frac{1}{k}\right]$$

可测.

既然收敛点集E_0可测,那么发散点集$E-E_0$亦可测.

[4.41] 一般地,可测函数的复合函数不一定可测,但在下面的情形,可测函数的复合函数仍可测:

设$f(x)$在R^1上连续,$g(x)$是$[a,b]=E$上的可测函数,则$f(g(x))$在$E=[a,b]$上可测.

证 设α为任意实数,要证$E[f(g(x))>\alpha]$可测.由f在R^1上连续可知,$\mathrm{R}^1[f>\alpha]$是开集,设其构成区间为(α_i,β_i) $(i=1,2,\cdots)$.于是

$\forall\, i\in\mathrm{N}$,当$g(x)\in(\alpha_i,\beta_i)$时$f(g(x))>\alpha$;反之,若$f(g(x))>\alpha$,则必有$i\in\mathrm{N}$,使$g(x)\in(\alpha_i,\beta_i)$.

所以

$$E[f(g(x))>\alpha]=\sum_{i=1}^{\infty}E[g(x)\in(\alpha_i,\beta_i)]$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}E[\alpha_i<g(x)<\beta_i].$$

但由题设，g 在 E 上可测，则 $E[\alpha_i<g(x)<\beta_i]$ 可测，从而 $E[f(g(x))>\alpha]$ 可测（α 为任意实数）.

故 $f(g(x))$ 是 E 上的可测函数.

[4.42] 设 f 在 E 上可测，g 是 R^1 上的 Borel 可测函数，试证：$g(f)$ 是 E 上的可测函数.

证 记 $F(x)=g(f(x))$. 先证 $\forall A\subseteq R^1$，下式成立：

$$F^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

事实上，$x\in F^{-1}(A)\Longleftrightarrow\exists\ y\in A$ 使 $F(x)=g(f(x))=y$.

$$\Longleftrightarrow f(x)\in g^{-1}(A)$$

$$\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

因此对于 $\forall\ \alpha\in R^1$，有

$$E[F>\alpha]=E[F(x)\in(\alpha,+\infty)]=F^{-1}[(\alpha,+\infty)]$$

$$=f^{-1}(g^{-1}((\alpha,+\infty))).$$

而 g 为 Borel 可测函数 $\Longrightarrow R^1[g>\alpha]=g^{-1}((\alpha,+\infty))$ 为 R^1 上的 Borel 集，即 $g^{-1}((\alpha,+\infty))=M$ 可测.

但 f 为可测函数 $\Longrightarrow f^{-1}(M)$ 为可测函数，即有 $E[F(x)>\alpha]$ 可测（$\forall\ \alpha\in R^1$）.

故 $F(x)=g(f(x))$ 为 E 上的可测函数.

[4.43] 设 $f(x)$ 是 E 上的几乎处处有限的可测函数，$mE<+\infty$，则 $\forall\ \varepsilon>0$，存在有界可测函数 $g(x)$，使

$$mE[f(x)\neq g(x)]<\varepsilon.$$

证 令 $E_0=E[|f(x)|=+\infty]$，则由于 f 在 E 上 $a.e.$ 有限，则 $mE_0=0$. 设 $E_n=E[|f(x)|\geqslant n]\ (n=1,2,\cdots)$，则有

$$E\supseteq E_1\supseteq E_2\supseteq\cdots\supseteq E_n\supseteq\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=E_0.$$

又 $\because\ mE_0=0$，$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}mE_n=0$.

因此，$\forall\ \varepsilon>0$，存在自然数 N，使

$$mE_N = mE[|f(x)| \geqslant N] < \varepsilon.$$

作函数

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E - E_N \\ 0. & x \in E_N \end{cases}$$

由 g 的定义知 $|g(x)| < N(x \in E)$，即 g 在 E 上有界. 而

$$E[f(x) \neq g(x)] \subseteq E_N,$$

故

$$mE[f \neq g] \leqslant mE_N < \varepsilon.$$

即此 $g(x)$ 便是符合要求的可测函数.

四、关于可测函数列的收敛性

［**4.44**］ 设 $\{f_n\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列，$mE < +\infty$，则 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 于 E 的充要条件是：对任意自然数 k，都有：

$$\lim_{N \to \infty} m\left(\sum_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k} \right] \right) = 0.$$

证 设 $D = \{x \mid f_n(x) \not\to f(x)(n \to \infty)\}$，则有

$$D = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k} \right] \qquad (*)$$

（见江泽坚编《实变函数论》P66"引理"），现在我们利用上述（*）来证明本题结论.

必要性.

设有 $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).\ a.e.$ 于 E，则有 $mD = 0$.

记

$$E_n(k) = E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k} \right], P_N(k) = \sum_{n=N}^{\infty} E_n(k).$$

于是有

$$D = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{N=1}^{\infty} \sum_{n=N}^{\infty} E_n(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{N=1}^{\infty} P_N(k).$$

由 $mD = 0$，得

$m(\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{N=1}^{\infty} P_N(k)) = 0$. 则对任意的 k，有

$$m(\prod_{N=1}^{\infty} P_N(k))=0 \qquad (k=1,2,\cdots).$$

但

$$E\supseteq P_1(k)\supseteq\cdots\supseteq P_N(k)\supseteq P_{N+1}(k)\supseteq\cdots$$

又由题设　$mE<+\infty$，因此

$$\lim_{N\to\infty} mP_N(k)=m(\prod_{N=1}^{\infty} P_N(k))=0.$$

故对任一自然数 k，有

$$\lim_{N\to\infty} m\sum_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right]=0.$$

充分性. 设$\forall$ 自然数 k 有下式成立：

$$\lim_{N\to\infty} m\sum_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right]=0.$$

即 $mP_N(k)\to 0(N\to\infty)$（记号同上）.

由极限定义，$\exists$ $N_0=N_0(k)$，当 $N\geqslant N_0$ 时：

$$mP_N(k)<\varepsilon(\varepsilon \text{ 为任意正数}).$$

由于 $\qquad P_1(k)\supseteq\cdots\supseteq P_N(k)\supseteq P_{N+1}(k)\supseteq\cdots$

因此有

$$m\prod_{N=1}^{\infty} P_N(k)=\lim_{N\to\infty} mP_N(k)=0\ (\forall\ k\in \mathrm{N}).$$

于是

$$m\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{N=1}^{\infty} P_N(k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} m\prod_{N=1}^{\infty} P_N(k)=0.$$

但

$$D=\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{N=1}^{\infty}\sum_{n=N}^{\infty} E_n(k)=\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{N=1}^{\infty} P_N(k).$$

故　$mD=0$

即　$f_N(x)\longrightarrow f(x)$ $a.e.$ 于 E.

[4.45]　当 f 是 E 上的有界可测函数时，必存在 E 上的可测子集的特征函数的线性组合（简单函数）所组成的函数序列$\{f_n\}$，

使

$$f_n \xrightarrow{\text{一致}} f(x) \text{于} E.$$

证 因 f 有界，可设 $|f(x)|<M(x\in E)$. 对任意自然数 n，记

$$E_j^{(n)}=E\left[\frac{j}{2^n}M\leqslant f(x)<\frac{j+1}{2^n}M\right], j=-2^n,-2^n+1,\cdots,2^n+1.$$

作函数：

$$f_n(x)=\sum_{j=-2^n}^{2^n+1}\frac{j}{2^n}M\chi_{E_j^{(n)}}(x).$$

因 f 可测，所以一切 $E_j^{(n)}$ 都可测，故 $\chi_{E_j^{(n)}}(x)$ 为可测函数. 即 $f_n(x)$ 确是 E 的可测子集的特征函数的线性组合，于是 $f_n(x)$ 是 E 上的可测函数(简单函数).

下证，$f_n \xrightarrow{\text{一致}} f(n\to\infty)$：事实上，$\forall\ \varepsilon>0$，取自然数 N，使 $M/2^N<\varepsilon$，则当 $n\geqslant N$ 时，对一切 $x\in E$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{M}{2^n}\leqslant\frac{M}{2^N}<\varepsilon.$$

故 当 $n\to\infty$时，$f_n(x)$一致收敛于 $f(x)$ $(x\in E)$.

[4.46] 设 $f_n\Longrightarrow f$ 于 E，且 $f_n(x)\leqslant g(x)$，$a.e.$ 于 $E(n=1,2,\cdots)$，则 $f(x)\leqslant g(x)$ $a.e.$ 于 E.

证 因 $f_n\Longrightarrow f$，由黎斯定理，$\exists$ 子列 $\{f_{n_k}(x)\}\subseteq\{f_n(x)\}$使

$$f_{n_k}\longrightarrow f.\ a.e.\ \text{于}\ E(k\to\infty). \qquad (*)$$

令

$$A=\left(\sum_{n=1}^{\infty}E[f_n>g]\right)\cup E[f_{n_k}\not\to f],$$

由(*)式得

$$mE[f_{n_k}\not\to f]=0,$$

而由题设 $f_n\leqslant g$ $a.e.$ 于 $E(n=1,2,\cdots)$可知：

$$\forall\ \varepsilon>0, mE[f_n>g]<\varepsilon/2^n(n=1,2,\cdots),$$

则有

$$mA\leqslant m\left(\sum_{n=1}^{\infty}E[f_n>g]\right)+mE[f_{n_k}\not\to f]$$

$$<\sum_{n=1}^{\infty} mE[f_n>g]+mE[f_{n_k}\not\to f]$$

$$<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}+0=\varepsilon.$$

即有 $mA=0$

而在 $E_0=E-A$ 上有 $f_{n_k}\leqslant g(\forall\ x\in E_0)$ 且 $f_{n_k}\to f(x\in E_0)$

故 $$f(x)=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)\leqslant g(x).\ x\in E_0.$$

即 $f(x)\leqslant g(x)a.e.$ 于 E.

[4.47] 设 $f_n\Rightarrow f$ 于 E，且 $f_n\leqslant f_{n+1}.\ a.e.$ 于 E $(n=1,2,\cdots)$，则 $f_n\longrightarrow f\ a.e.$ 于 E.

证 由 $f_n\Rightarrow f$ 知，$\exists\ \{f_{n_k}\}\subseteq\{f_n\}$，使 $f_{n_k}\xrightarrow{a.e.}f$ 于 E.

令

$$Q=\left(\sum_{n=1}^{\infty}E[f_n>f_{n+1}]\right)\cup E[f_{n_k}\not\to f].$$

因为有 $mE[f_{n_k}\not\to f]=0$；而对 $\forall\ n$，由于

$$f_n\leqslant f_{n+1}\ a.e.\ 于\ E,$$

则

$$mE[f_n>f_{n+1}]<\varepsilon/2^n(n=1,2,\cdots),$$

即对 $\forall\ \varepsilon>0$，又有

$$m\left(\sum_{n=1}^{\infty}E[f_n>f_{n+1}]\right)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

所以，$mQ=0$.

于是，对 $\forall\ x_0\in E-Q$，有

$$f_n(x_0)\leqslant f_{n+1}(x_0)，且\ f_{n_k}(x_0)\longrightarrow f(x_0).\ (k\to\infty)$$

即 $\{f_n(x_0)\}$ 为单调不减数列，且子列 $\{f_{n_k}(x_0)\}$ 有极限 $f(x_0)$. 所以 $\{f_n(x_0)\}$ 当 $n\to\infty$ 时有极限，且极限为 $f(x_0)$. 由 $x_0\in E-Q$ 的任意性即有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(x\in E-Q).$$

即 $f_n\longrightarrow f\ a.e.$ 于 E.

注 一般情况下，当 $f_n \Longrightarrow f$ 时，由黎斯定理，只能确定 $\{f_n\}$ 的一个子列 $\{f_{n_k}\}$ 几乎处处收敛于 f. 但此题说明，当 $\{f_n\}$ 为"单调"函数列时，由 $f_n \Longrightarrow f$ 可导出 $f_n \longrightarrow f$ $a.e.$ 于 E.

[4.48] 设 $f_n \Longrightarrow f$ 于 E，且 $f_n = g_n$ $a.e.$ 于 $E(n=1,2,\cdots)$ 则有

$$g_n \Longrightarrow f \text{ 于 } E(E \text{ 为可测集}).$$

证 令

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} E[f_n \neq g_n].$$

对 $\forall$ $\varepsilon > 0$，因 $f_n = g_n$ $a.e.$ 于 E，所以有

$$mE[f_n \neq g_n] < \varepsilon/2^n (n=1,2,\cdots).$$

于是

$$mA \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mE[f_n \neq g_n] < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

$\therefore$ $mA = 0$，

故 对于任意正数 $\sigma > 0$，由于

$$E[|g_n - f| \geqslant \sigma] \subseteq E[|f_n - f| \geqslant \sigma] \cup A.$$

则

$$mE[|g_n - f| \geqslant \sigma] \leqslant mE[|f_n - f| \geqslant \sigma] + mA$$
$$= mE[|f_n - f| \geqslant \sigma]$$

而由 $f_n \Longrightarrow f$ 得

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f_n - f| \geqslant \sigma] = 0.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} mE[|g_n - f| \geqslant \sigma] = 0.$$

即 $g_n \Longrightarrow f$ 于 E.

[4.49] 设 $f_n \Longrightarrow f$ 于 E，且 $f = g$ $a.e.$ 于 E，则

$$f_n(x) \Longrightarrow g(x) \text{ 于 } E.$$

证 因

$$E[|f_n - g| \geqslant \sigma] \subseteq E[f \neq g] \cup E[|f_n - f| \geqslant \sigma],$$

所以

$$mE[|f_n-g|\geqslant\sigma]\leqslant mE[f\neq g]+mE[|f_n-f|\geqslant\sigma].$$

而由 $f=g$ $a.e.$ 于 E 可知 $mE[f(x)\neq g(x)]=0$.

则有

$$mE[|f_n-g|\geqslant\sigma]\leqslant mE[|f_n-f|\geqslant\sigma].$$

又因 $f_n\Longrightarrow f$ 于 E,即

$$\lim_{n\to\infty}mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]=0.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}mE[|f_n-g|\geqslant\sigma]=0.$$

故 $f_n\Longrightarrow g$ 于 E.

[4.50] 设 $f_n\Longrightarrow f$ 于 E,$g(x)$是 E 上几乎处处有限的可测函数.则有

(1) $|f_n(x)|\Longrightarrow|f(x)|$; (2) $f_n(x)g(x)\Longrightarrow f(x)g(x)$.

证 (1) 由 $||f_n|-|f||\leqslant|f_n-f|$有

$$E[||f_n|-|f||\geqslant\sigma]\subseteq E[|f_n-f|\geqslant\sigma].$$

从而

$$mE[||f_n|-|f||\geqslant\sigma]\leqslant mE[|f_n-f|\geqslant\sigma].$$

又由 $f_n\Longrightarrow f$ 于 E,有

$$\lim_{n\to\infty}mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]=0(\forall\ \sigma>0).$$

故

$$\lim_{n\to\infty}mE[||f_n|-|f||\geqslant\sigma]=0(\forall\ \sigma>0).$$

即 $|f_n|\Longrightarrow|f|$于 E.

(2) $\forall\ \varepsilon>0$,因 $g(x)$几乎处处有限,所以$\exists\ k>0$,使

$$mE[|g|\geqslant k]<\varepsilon/2.$$

又由 $f_n\Longrightarrow f$ 得,$\forall\ \sigma>0$,$\exists\ N=N(k,\sigma)$,当 $n>N$ 时,

$$mE\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{k}\right]<\varepsilon/2.$$

而由 $|f_ng-fg|=|f_n-f|\cdot|g|\geqslant\sigma$ 可得

$$|g|\geqslant k \text{ 或 } |f_n-f|\geqslant\sigma/k\ (k \text{ 正数},n>N),$$

于是

$$E[|f_n\cdot g-f\cdot g|\geqslant\sigma]\subseteq E[|g|\geqslant k]\cup E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{k}\right].$$

因此，当 $n>N$ 时有

$$\begin{aligned}&mE[|f_ng-fg|\geqslant\sigma]\\ \leqslant&mE[|g|\geqslant k]+mE\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{k}\right]\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知

$$\lim_{n\to\infty}mE[|f_ng-fg|\geqslant\sigma]=0.$$

故 $f_n(x)\cdot g(x)\Longrightarrow f(x)g(x)$ 于 E.

[4.51] 设 $f_n\Longrightarrow f$ 于 E，$g_n\Longrightarrow g$ 于 E，则有

(1) $f_n+g_n\Longrightarrow f+g$； (2) $f_n-g_n\Longrightarrow f-g$；

(3) $f_n^2\Longrightarrow f^2$； (4) $f_n\cdot g_n\Longrightarrow f\cdot g$.

证 (1) 由题设，$\forall\ \sigma>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}mE\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}mE\left[|g_n-g|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]=0.$$

而由 $|f_n+g_n-(f+g)|\geqslant\sigma$ 及

$$|(f_n-f)+(g_n-g)|\leqslant|f_n-f|+|g_n-g|$$

得出

$$|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\text{或}|g_n-g|\geqslant\frac{\sigma}{2}.$$

所以

$$\begin{aligned}&E[|(f_n+g_n)-(f+g)|\geqslant\sigma]\\ \subseteq&E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]\cup E\left[|g_n-g|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right].\end{aligned}$$

对一切自然数 n 成立（这种分解技巧我们在解有关依测度收敛的题目时经常用到）.

于是

$$mE[|(f_n+g_n)-(f+g)|\geqslant\sigma]$$

$$\leqslant mE\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]+mE\left[|g_n-g|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]$$

$$\longrightarrow 0+0=0(n\to\infty).$$

故

$$\lim_{n\to\infty}mE[|(f_n+g_n)-(f+g)|\geqslant\sigma]=0$$

即 $f_n(x)+g_n(x)\Longrightarrow f(x)+g(x)$ 于 E.

(2) 与(1)类似地有:

$$E[|(f_n-g_n)-(f-g)|\geqslant\sigma]\subseteq E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]\cup E\left[|g_n-g|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right].$$

其它过程与(1)完全相同.

(3) 先证"若 $f_n\Longrightarrow 0$, 则 $f_n^2\Longrightarrow 0$". 事实上, $\forall\ \sigma>0$,

$$\begin{aligned}E[|f_n^2-0|\geqslant\sigma]&=E[|f_n|^2\geqslant\sigma]\\&=E[|f_n|\geqslant\sqrt{\sigma}]\\&=E[|f_n-0|\geqslant\sqrt{\sigma}].\end{aligned}$$

由 $f_n\Longrightarrow 0$ 知,

$$\lim_{n\to\infty}mE[|f_n-0|\geqslant\sqrt{\sigma}]=0(\sqrt{\sigma}>0).$$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty}mE[|f_n^2-0|\geqslant\sigma]=0$. 即 $f_n^2\Longrightarrow 0$.

再证"若 $f_n\Longrightarrow f$, 则 $f_n^2\Longrightarrow f^2$". 事实上我们有:

$$f_n^2-f^2=(f_n-f)^2+2f(f_n-f), \text{且 } f_n\Longrightarrow f,$$

$\therefore\quad f_n-f\Longrightarrow 0$(其中 f $a.e.$ 有限).

从而, $(f_n-f)^2\Longrightarrow 0, 2f(f_n-f)\longrightarrow 2f\cdot 0=0(n\to\infty)$.

因此 $f_n^2-f^2\Longrightarrow 0$, 即 $f_n^2\Longrightarrow f^2$.

(4) 因为

$$\begin{aligned}&f_n\cdot g_n-f\cdot g\\&=\frac{1}{4}[((f_n-f)+(g_n-g))^2-((f_n-f)-(g_n-g))^2]\\&\quad+f\cdot(g_n-g)+g\cdot(f_n-f).\end{aligned}$$

而 $f_n\Longrightarrow f, g_n\Longrightarrow g$. 从而亦有 f, g $a.e.$ 有限.

$\therefore \quad f\cdot(g_n-g)\Longrightarrow f\cdot 0=0;g\cdot(f_n-f)\Longrightarrow g\cdot 0=0.$

又由 $$(f_n-f)+(g_n-g)\Longrightarrow 0+0=0,$$

及 $$(f_n-f)-(g_n-g)\Longrightarrow 0-0=0,$$

可得

$$(f_n-f+g_n-g)^2\Longrightarrow 0;(f_n-f-g_n+g)^2\Longrightarrow 0.$$

故 $$f_n\cdot g_n-f\cdot g\Longrightarrow 0.$$

即 $f_n(x)\cdot g_n(x)\Longrightarrow f(x)\cdot g(x)$于 E.

[4.52] 设 $mE<+\infty$,$\{f_n\}$为 E 上的可测函数列,则 $f_n\Longrightarrow f$ 于 E 的充要条件是:$\forall\ \{f_{n_k}\}\subseteq\{f_n\}$,$\exists\ \{f_{n_k}\}$的子列$\{f_{n_{k_j}}\}$,使

$$f_{n_{k_j}}(x)\longrightarrow f(x)a.e.\text{ 于 }E(j\to\infty).$$

证 必要性 若 $f_n\Longrightarrow f$,由定义可知,它的任一子列$\{f_{n_k}\}$也依测度收敛于 f. 对$\{f_{n_k}\}$及其极限 $f(x)$应用黎斯定理,必存在$\{f_{n_{k_j}}\}\subseteq\{f_{n_k}\}$,使

$$f_{n_{k_j}}(x)\longrightarrow f(x)a.e.\text{ 于 }E(j\to\infty). \tag{1}$$

充分性 设$\{f_n\}$的任意子列$\{f_{n_k}\}$都有一子列$\{f_{n_{k_j}}\}$满足:

$$f_{n_{k_j}}(x)\longrightarrow f(x)a.e.\text{ 于 }E(j\to\infty).$$

以下用反证法证明,必有 $f_n\Longrightarrow f$. 设若 $f_n\not\Longrightarrow f$ 于 E,则$\exists\ \sigma>0$,使

$$mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]\not\longrightarrow 0(n\to\infty).$$

因此应有子列$\{f_{n_k}\}\subseteq\{f_n\}$使得

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f_{n_k}-f|\geqslant\sigma]>0 \tag{2}$$

从而对于$\{f_{n_k}\}$的任一子列$\{f_{n_{k_j}}\}$,若 $f_{n_{k_j}}\longrightarrow f\ a.e.$ 于 $E(j\to\infty)$,则有

$$\lim_{j\to\infty} mE[|f_{n_{k_j}}(x)-f(x)|\geqslant\sigma]=0(mE<+\infty).$$

这与(2)矛盾.

所以,在$\{f_{n_k}\}$中不存在几乎处处收敛于 $f(x)$的子列,但这一结论与题设条件相矛盾.

故 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$于 $E(n\to\infty)$.

[4.53] 几乎处处有限的可测函数列$\{f_n(x)\}$依测度收敛的充要条件是:$\forall\ \sigma>0$ 及 $\varepsilon>0$,$\exists$ 自然数 N,当 $n>N$,$m>N$ 时,使得

$$mE[|f_n-f_m|\geqslant\sigma]<\varepsilon.$$

证 必要性 设 $f_n\Rightarrow f$,则$\forall\ \sigma>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}mE\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]=0.$$

即$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N$,当 $n>N$ 时

$$mE\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]<\varepsilon/2.$$

又

$$E[|f_n-f_m|\geqslant\sigma]\subseteq E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]\cup E\left[|f_m-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]$$

所以,当 $n,m>N$ 时

$$\begin{aligned}&mE[|f_n-f_m|\geqslant\sigma]\\ \leqslant\ &mE\left[|f_n-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]+mE\left[|f_m-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]\\ <\ &\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

充分性 设对$\forall\ \sigma>0$,$\varepsilon>0$,$\exists$ 自然数 N,当 $n,m>N$ 时,有 $mE[|f_n-f_m|\geqslant\sigma]<\varepsilon$.

则对任一自然数 k,可取 $N_k\in\mathbb{N}$,使得当 n、$m\geqslant N_k$ 时有

$$mE\left[|f_n-f_m|\geqslant\frac{1}{2^k}\right]<\frac{1}{2^k}=2^{-k}.$$

而且可取上述 N_k,使 $N_k\leqslant N_{k+1}$. 若令

$$E_k=E\left[|f_{N_k}-f_{N_{k+1}}|\geqslant\frac{1}{2^k}\right],$$

则显然 $E_k\supseteq E_{k+1}(k=1,2,\cdots)$,且

$$mE_k<2^{-k}. \tag{3}$$

记 $S=\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}E_k$,可证 $mS=0$. 事实上,由于

$$m\left(\sum_{k=n}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}mE_k<\sum_{k=n}^{\infty}2^{-k}=1/2^{n-1}.$$

而显然$\sum_{k=n}^{\infty}E_k \supseteq \sum_{k=n+1}^{\infty}E_k$，即$\left\{\sum_{k=n}^{\infty}E_k\right\}_n$为单调集列

故

$$mS=\lim_{n\to\infty}m\left(\sum_{k=n}^{\infty}E_k\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0.$$

下面我们证明$f_{N_k}(x)\Longrightarrow f(x)$于$E(k\to\infty)$. 事实上，设$x\in E-S$（注意$S$是零测集），则存在自然数$n$，使

$$x\in E-\sum_{k=n}^{\infty}E_k,$$

所以对一切$k>n$时，$x\overline{\in}E_k$. 由(3)知，$E_k=\left[\,|f_{N_k}-f_{N+1}|\geqslant\frac{1}{2^k}\right]$，从而$x\overline{\in}E_k$，即为：$|f_{N_k}-f_{N_{k+1}}(x)|<2^{-k}$.
由此可知，当$m>n$时有

$$\sum_{k=m}^{\infty}|f_{N_{k+1}}(x)-f_{N_k}(x)|\leqslant 2^{-(m-1)}. \tag{4}$$

这说明，级数$f_{N_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_{N_{k+1}}(x)-f_{N_k}(x)]$在$E-S$上绝对收敛. 因此$\{f_{N_k}\}$在$E$上几乎处处收敛，设其极限函数为$f(x)$，则$f(x)$是$E$上几乎处处有限的可测函数.

另外，根据(4)式，由M-判别法知，$\{f_{N_k}(x)\}$在$E-\sum_{k=n}^{\infty}E_k$上一致收敛于$f(x)$. 因为

$$m\left(\sum_{k=n}^{\infty}E_k\right)<2^{-(n-1)},$$

所以$f_{N_k}\xrightarrow{\text{一致}}f$于$E$. 而一致收敛可推出依测度收敛.

故　$f_{N_k}\Longrightarrow f$于$E(k\to\infty)$.

最后，由

$$mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]\leqslant mE\left[|f_n-f_{N_k}|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]+mE\left[|f_{N_k}-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]$$

得

$$\lim_{n\to\infty}mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]=0.$$

故 $f_n \Longrightarrow f(x)$ 于 E.

注 我们称满足条件:"$\forall \sigma > 0, \varepsilon > 0$, $\exists$ 自然数 N, 当 $n, m > N$ 时, $mE[|f_n - f_m| \geqslant \sigma] < \varepsilon$."的可测函数列为依测度基本列. 于是本题可表述为:

$f_n \Longrightarrow f$ 于 $E \Longleftrightarrow \{f_n\}$ 为依测度基本列.

[4.54] 如果对于任意固定的 n, 当 $k \to \infty$ 时, $f_k^{(n)}(x) \Longrightarrow f^{(n)}(x)(k \to \infty)$, 而当 $n \to \infty$ 时, $f^{(n)}(x) \Longrightarrow f(x)(n \to \infty)$, 则在 $\{f_k^{(n)}(x)\}$ 中可以选取函数列依测度收敛于 $f(x)$.

证 任取两个单调下降的正数列 $\{\sigma_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$, 且 $\sigma_n \downarrow 0$, $\varepsilon_n \downarrow 0(n \to \infty)$. 对任一自然数 n, 由于

$$f_k^{(n)}(x) \Longrightarrow f^{(n)}(x)(k \to \infty)$$

所以必有 k_n, 使得

$$mE\left[|f_{k_n}^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)| \geqslant \frac{\sigma_n}{2}\right] < \varepsilon_n/2 \ (n = 1, 2, \cdots).$$

下证 $\{f_{k_n}^{(n)}(x)\}$ 即为所求函数列:

$\forall \sigma > 0, \varepsilon > 0$, 由于 $\sigma_n \downarrow 0, \varepsilon_n \downarrow 0$, 故存在自然数 N_1, 当 $n \geqslant N_1$ 时, $\sigma_n < \sigma, \varepsilon_n < \varepsilon$. 而当 $n \geqslant N_1$ 时

$$E\left[|f_{k_n}^{(n)} - f^{(n)}| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right] \subseteq E\left[|f_{k_n}^{(n)} - f^{(n)}| \geqslant \frac{\sigma_n}{2}\right],$$

所以

$$mE\left[|f_{k_n}^{(n)} - f^{(n)}| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right]$$
$$\leqslant mE\left[|f_{k_n}^{(n)} - f^{(n)}| \geqslant \frac{\sigma_n}{2}\right] < \frac{\varepsilon_n}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

另外由 $f^{(n)} \Longrightarrow f$ 知, $\exists$ 自然数 N_2, 当 $n \geqslant N_2$ 时

$$mE\left[|f^{(n)} - f| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$mE\left[|f_{k_n}^{(n)} - f^{(n)}| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right] < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1}$$

$$mE\left[|f^{(n)} - f| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right] < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

但我们有

$$E[|f_{k_n}^{(n)}-f|\geqslant\sigma]\subseteq E\left[|f_{k_n}^{(n)}-f^{(n)}|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]\cup E\left[|f^{(n)}-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right].$$

从而当 $n\geqslant N$ 时，由(1)、(2)知

$$\begin{aligned}&mE[|f_{k_n}^{(n)}-f(x)|\geqslant\sigma]\\ \leqslant& mE\left[|f_{k_n}^{(n)}-f^{(n)}|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]+mE\left[|f^{(n)}-f|\geqslant\frac{\sigma}{2}\right]\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}mE[|f_{k_n}^{(n)}-f|\geqslant\sigma]=0$$

故 $f_{k_n}^{(n)}(x)\Longrightarrow f(x)$ 于 E.

［4.55］ 设 $g(x)$ 是 R^1 上的连续函数，$mE<+\infty$. $\{f_n\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列. 且 $f_n(x)\Longrightarrow f(x)$ 于 E. 则有

$$g[f_n(x)]\Longrightarrow g[f(x)]\text{于 } E.$$

证 由 $f_n\Longrightarrow f$，$\{f_n\}$ 为几乎处处有限可知，f 也几乎处处有限. 于是对$\forall\ \varepsilon>0,\sigma>0$，$\exists$ 自然数 N_0 及 n_1，当 $n\geqslant n_1$ 时

$$mE[|f_n(x)|\geqslant N_0]<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$mE[|f(x)|\geqslant N_0]<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{1}$$

由于 g 在 R^1 上连续，所以 g 在$[-N_0,N_0]$上连续，由多项式逼近连续函数的维尔斯特拉斯定理可知，有多项式 $P(x)$，使$\forall\ x\in[-N_0,N_0]$

$$|g(x)-P(x)|<\sigma/4. \tag{2}$$

记

$$E_n=E[|f_n(x)|<N_0]\cap E[|f(x)|<N_0],$$

则

$$E=E[|f_n|\geqslant N_0]\cup E[|f(x)|\geqslant N_0]\cup E_n.$$

故

$$E[|g(f_n)-g(f)|\geqslant\sigma]$$

$$=(E[|f_n|\geqslant N_0]\cup E[|f|\geqslant N_0]\cup E_n)\cap E[|g(f_n)-g(f)|\geqslant\sigma]$$

$$\subseteq E[|f_n|\geqslant N_0]\cup E[|f|\geqslant N_0]\cup(E_n\cap E[|g(f_n)-g(f)|\geqslant\sigma]) \tag{*}$$

现证下式成立：

$$m(E_n\cap E[|g(f_n)-g(f)|\geqslant\sigma])<\epsilon/2. \tag{3}$$

因 $f_n\Longrightarrow f$，用数学归纳法与依测度收敛的运算性质可知：

$$[f_n(x)]^k\Longrightarrow[f(x)]^k. \tag{*}$$

由于

$$P(f_n(x))=a_0(f_n(x))^k+a_1(f_n(x))^{k-1}+\cdots+a_k$$

从而由(*)式知. $P(f_n(x))\Longrightarrow P(f(x))$.

故对前述 $\epsilon>0,\sigma>0,\exists\ n_2$，当 $n>n_2$ 时

$$mE[|P(f_n)-P(f)|\geqslant\sigma/3]<\epsilon/2. \tag{4}$$

当 $x\in E_n$ 时，$|f_n(x)|<N_0$，$|f(x)|<N_0$，由(2)式即知，当 $x\in E_n$ 时便有

$$|g(f_n(x))-P(f_n(x))|<\sigma/4$$

$$|g(f(x))-P(f(x))|<\sigma/4.$$

这两个式子表明：

$$E_n\cap E[|g(f_n(x))-P(f_n(x))|\geqslant\sigma/3]=\varnothing,$$

$$E_n\cap E[g(f(x))-P(f(x))|\geqslant\sigma/3]=\varnothing. \tag{5}$$

但

$$\begin{aligned}&E_n\cap E[|g(f_n(x))-g(f(x))|\geqslant\sigma]\\&\quad\subseteq(E_n\cap E[|g(f_n)-P(f_n)|\geqslant\sigma/3])\\&\quad\cup(E_n\cap E[|P(f_n)-P(f)|\geqslant\sigma/3])\\&\quad\cup(E_n\cap E[|g(f)-P(f)|\geqslant\sigma/3])\\&\xlongequal{\text{由(5)式}}E_n\cap E[|P(f_n)-P(f)|\geqslant\sigma/3]\end{aligned}$$

因此，当 $n>n_2$ 时，有

$$m(E_n\cap E[|g(f_n)-g(f)|\geqslant\sigma])$$

$$\leqslant m(E_n\cap E[|P(f_n)-P(f(x))|\geqslant\sigma/3)$$

$$\leqslant mE[|P(f_n(x))-P(f(x))|\geqslant\sigma/3]<\varepsilon/2.$$

这就证得了(3)式.

取 $n_0=\max\{n_1,n_2\}$，则当 $n>n_0$ 时，(1)、(2)、(3)都成立，把(1)、(2)、(3)式的结果代入(*). 即有当 $n>n_0$ 时：

$$mE[|g(f_n)-g(f)|\geqslant\sigma]<\varepsilon.$$

亦即

$$\lim_{n\to\infty}mE[|g(f_n(x))-g(f(x))|\geqslant\sigma]=0.$$

故 $g[f_n(x)]\Longrightarrow g[f(x)]$ 于 E.

五、叶果洛夫定理和鲁金定理的应用·杂题

[4.56] 若 E 是有界可测集，$f(x)$ 为 E 上几乎处处有限的函数，则 $f(x)$ 可测的充要条件是：存在一串在整个空间上连续的函数 $\varphi_n(x)$，使

$$\varphi_n(x)\longrightarrow f(x)\ a.e.\ 于\ E(n\to\infty).$$

试就一维空间的情形证明之.

证 充分性 因 $\varphi_n(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上连续，所以 $\varphi_n(x)$ 为 E 上的可测函数，又

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\ a.e.\ 于\ E.$$

故 $f(x)$ 为 E 上的可测函数.

必要性 由题设，$f(x)$ 在 E 上几乎处处有限且可测 $(mE<+\infty)$. 根据鲁金定理，对 $\forall\ \varepsilon_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，存在闭集 F_n 和在 $\mathbf{R}^1$ 上连续的函数 $g_n(x)$，使

(i) 在 F_n 中，$g_n(x)=f(x)$；

(ii) $m(E-F_n)<\varepsilon_n(n=1,2,\cdots)$.

于是，对 $\forall\ \sigma>0$，

$$E[|g_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]\subseteq E[g_n(x)\neq f(x)]\subseteq E-F_n.$$

从而

$$mE[|g_n-f|\geqslant\sigma]\leqslant m(E-F_n)<\varepsilon_n=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots).$$

即有

$$\lim_{n\to\infty} mE[|g_n - f| \geqslant \sigma] = 0.$$

亦即 $g_n(x) \Longrightarrow f(x)$ 于 E.

再由黎斯定理可知，存在子列 $\{g_{n_k}(x)\} \subseteq \{g_n(x)\}$，使

$$\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(x) = f(x) \ a.e. \text{ 于 } E.$$

记 $\varphi_k(x) = g_{n_k}(x)$，则 $\varphi_k(x)$ 在 R^1 上连续，且

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \ a.e. \text{ 于 } E.$$

[4.57] 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的几乎处处有限的可测函数，则对于任意 $\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$，恒有闭集 $F\subseteq[a,b]$ 及多项式 $P(x)$，使 $mF>b-a-\delta$，而在 F 上

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

证 记 $E=[a,b]$，因 $f(x)$ 为 E 上几乎处处有限的可测函数，由鲁金定理，对 $\forall\ \delta>0$，$\exists$ 闭集 $F\subseteq E$ 和在 R^1 上连续的函数 $g(x)$，使得

(i) 在 F 上 $f(x)=g(x)$； (ii) $m(E-F)<\delta$.

所以

$$mF = m[a,b] - m([a,b]-F) > b-a-\delta.$$

由于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则由维尔斯特拉斯逼近定理知，对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$ 多项式 $P(x)$，使对 $\forall\ x\in[a,b]$，有

$$|g(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

从而在 F 上也有 $|g(x)-P(x)|<\varepsilon$. 但当 $x\in F$ 时 $f(x)=g(x)$

故 $|f(x)-P(x)|<\varepsilon (x\in F)$.

[4.58] 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列，而 $f_n(x)$ 几乎处处收敛，则存在常数 C 和正测度集 $E_0\subseteq E$，使

$$\forall\ x\in E_0、n\in \mathrm{N}：|f_n(x)|\leqslant C.$$

证 由题意显然有 $mE>0$，不妨设 $mE<+\infty$（否则任取 E 中满足 $0<mE_1<\infty$ 的子集 E_1 来代替 E）.

依题设 $f_n(x)$ 在 E 上几乎处处收敛，设极限函数为 $f(x)$，即

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) a.e. \text{ 于 } E (n\to\infty).$$

由叶果洛夫定理，对 $\delta=mE/4>0$，$\exists\ E_\delta\subseteq E$，使得

(i) $m(E-E_\delta)<\delta=mE/4$，即 $mE_\delta>\frac{3}{4}mE$；

(ii) 在 E_δ 上 f_n 一致收敛于 $f(x)$.

另外，在 E_δ 上使用鲁金定理. 对 $\epsilon=mE/4>0$，由鲁金定理，存在闭集 $F\subseteq E_\delta$，使得

(i) $m(F_\delta-F)<mE/4$，即 $mF>mE/2$；

(ii) $f(x)$ 在 F 上连续，于是 $\exists\ M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M(x\in F)$.

由于 f_n 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$，故 f_n 在 F 上也一致收敛于 $f(F\subseteq E_\delta)$. 所以，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant 1(x\in F).$$

从而

$$|f_n(x)|\leqslant|f(x)|+1\leqslant M+1\ \ (n>N,x\in F).$$

即 $\forall\ x\in F$，当 $n>N$：$|f_n(x)|\leqslant M+1$.

再考虑 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_N(x)$. 因 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,N)$ 几乎处处有限，故 $mE[|f_i|=+\infty]=0(i=1,2,\cdots,N)$.

而

$$E[|f_i|=+\infty]=\prod_{k=1}^{\infty}E[|f_i|>k]$$

且

$$E[|f_i|>k]\supseteq E[|f_i|>k+1].\ (i=1,2,\cdots,N)$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}mE[|f_i|>k]=mE[|f_i|=+\infty]=0.$$

故对每个 $i(i=1,2,\cdots,N)$，$\exists\ k_i$，使

$$mE[|f_i|>k_i]<mF/2N.$$

取 $k_0=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_N\}$，则

$$mE[|f_i|>k_0]<mF/2N(i=1,2,\cdots,N).$$

于是

$$m\left(\sum_{i=1}^{N}E[|f_i|>k_0]\right)\leqslant\sum_{i=1}^{N}mE[|f_i|>k_0]$$

$$<\frac{mF}{2N}\cdot N=\frac{mF}{2}.$$

故只须令

$$E_0=F-\sum_{i=1}^{N}E[|f_i|>c],c=\max(M+1,k_0),$$

则

$$mE_0>mF-mF/2=\frac{1}{2}mF>\frac{1}{4}mE>0.$$

且在 $E_0(\subseteq F)$ 上，对一切 n 均有

$$|f_n(x)|\leqslant c.$$

[4.59] 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots f_k(x),\cdots$ 是 $E=[a,b]$ 上几乎处处有限的可测函数，且有 $f_k\longrightarrow f$ a.e. 于 $E(k\to\infty)$. 则存在可测集 $E_n\subseteq[a,b](n=1,2,\cdots)$，使得

$$m\left([a,b]-\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0,$$

而在每个 E_n 上，$f_k\xrightarrow{一致}f(k\to\infty)$.

证 题设条件已符合叶果洛夫定理的全部条件，所以，对 $\delta_n=\frac{1}{n}>0$，$\exists$ $E_{\delta_n}\subseteq E$，使 $mE_{\delta_n}\leqslant\frac{1}{n}$，而在 $[a,b]-E_{\delta_n}$ 上：$f_k\xrightarrow{一致}f$ 于 $E_n(E_n=[a,b]-\overline{E_{\delta_n}})$.

于是有

$$m\left(\prod_{n=1}^{\infty}E_{\delta_n}\right)\leqslant mE_{\delta_n}\leqslant\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots).$$

故

$$m\left(\prod_{n=1}^{\infty}E_{\delta_n}\right)=0.$$

而

$$\begin{aligned}[a,b]-\sum_{n=1}^{\infty}E_n&=[a,b]\cap\mathscr{S}\sum_{n=1}^{\infty}E_n\\&=[a,b]\cap\left(\prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{S}E_n\right)\end{aligned}$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}[a,b]\mathscr{C}E_n$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}([a,b]-E_n)$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}E_{\delta_n}$$

故

$$m\left([a,b]-\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0.$$

综上证明知，∃ 可测集 $E_n=[a,b]-E_{\delta_n}$，使得

$$m\left([a,b]-\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0,$$

而在每个 E_n 上，$f_k \xrightarrow{\text{一致}} f(k\to\infty)$.

［4.60］ 设 $mE<+\infty$，对于 E 中每点都趋于 $+\infty$ 的函数列建立叶果洛夫定理.

［叙述］ 设可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $+\infty$（放宽题设条件），则 $\forall\ \delta>0$，∃ 可测集 $E_\delta\subseteq E$ 使

$$m(E-E_\delta)<\delta,\text{且 } f_n \xrightarrow{\text{一致}} +\infty \text{于 } E_\delta.$$

证 令 $P=E[f_n\longrightarrow+\infty]$，$Q=E-P$. 由假设条件知，$mQ=0$.

取数列 α_i 单调上升趋于 $+\infty(i=1,2,\cdots)$，则由集合相等的定义易证：

$$P=\prod_{i=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=n}^{\infty}E[f_k>\alpha_i]\right]\text{（收敛点集）}.$$

从而

$$Q=\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}E[f_k\leqslant\alpha_i],$$

记
$$A_n^i=\sum_{k=n}^{\infty}E[f_k\leqslant\alpha_i],$$

则
$$Q=\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}A_n^i.$$

由 $mQ=0$ 有 $m\left(\prod_{n=1}^{\infty}A_n^i\right)=0$.

显然有 $A_{n+1}^i\subseteq A_n^i$，所以有

$$\lim_{n\to\infty}mA_n^i=m\left(\prod_{n=1}^{\infty}A_n^i\right)=0(i=1,2,\cdots).$$

再取 $\{\beta_i\}$ 为单调下降趋于 0 的数列，且使

$$\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i<+\infty.$$

由于 $\lim_{n\to\infty}mA_n^i=0$，则对 $\forall\ \alpha_i>0,\beta_i>0,\exists\ n_i$，使得

$$mA_{n_i}^i<\beta_i.$$

由于 $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i$ 收敛，故对 $\forall\ \delta>0,\exists\ i_0$，使 $\sum_{i=i_0}^{\infty}\beta_i<\delta$.

令

$$E_\delta=\prod_{i=i_0}^{\infty}\prod_{k=n_i}^{\infty}E[f_k(x)>\alpha_i],$$

则由于

$$\begin{aligned}
E-E_\delta &=E-\prod_{i=i_0}^{\infty}\prod_{k=n_i}^{\infty}E[f_k(x)>\alpha_i]\\
&=E\cap\left(\mathscr{S}\prod_{i=i_0}^{\infty}\prod_{k=n_i}^{\infty}E[f_k(x)>\alpha_i]\right)\\
&=E\cap\left(\sum_{i=i_0}^{\infty}\sum_{k=n_i}^{\infty}\mathscr{S}E[f_k(x)>\alpha_i]\right)\\
&=E\cap\left(\sum_{i=i_0}^{\infty}\sum_{k=n_i}^{\infty}E[f_k(x)\leqslant\alpha_i]\right)\\
&\leqslant\sum_{i=i_0}^{\infty}\sum_{k=n_i}^{\infty}E[f_k(x)\leqslant\alpha_i]\\
&=\sum_{i=i_0}^{\infty}A_{n_i}^i,
\end{aligned}$$

故

$$m(E-E_\delta)\leqslant\sum_{i=i_0}^{\infty}mA_{n_i}^i<\sum_{i=i_0}^{\infty}\beta_i<\delta.$$

最后证明 $f_k(x)\xrightarrow{\text{一致}}+\infty$ 于 E_δ.

因 $\alpha_i\to+\infty$，所以对$\forall\ M>0$，$\exists\ i_1\geqslant i_0$，使 $\alpha_{i_1}>M$，从而对任意

$x\in E_\delta=\bigcap_{i=i_0}^{\infty}\bigcap_{k=n_i}^{\infty}E[f_k>\alpha_i]$必有

$$x\in\bigcap_{k=n_{i_1}}^{\infty}E[f_k>\alpha_{i_1}],$$

故 $f_k(x)>\alpha_{i_1}$.

这就是说，当 $k\geqslant n_{i_1}$ 时，$\forall\ x\in E_\delta$ 都有

$$f_k(x)>\alpha_{i_1}>M$$

其中 n_{i_1} 与 x 无关，只与 M 有关. 故$\{f_k(x)\}$在 E_δ 上一致趋于 $+\infty$.

同理可证：设 $mE<+\infty$，$\{f_n\}$是 E 上一串几乎处处趋于$-\infty$的可测函数. 则$\forall\ \delta>0$，存在可测集 $E_\delta\subseteq E$，使

$$m(E-E_\delta)<\delta,\text{且 } f_n\xrightarrow{\text{一致}}-\infty\text{于 } E_\delta.$$

[4.61] 设 $f(x)$是 E 上的可测函数，$\varphi(y)$为其值域上的单调函数，则 $\varphi(f(x))$在 E 上也是可测函数.

证 即要证，对$\forall\ \alpha\in\mathbb{R}^1$，$E[x\mid\varphi(f(x))\geqslant\alpha]$为可测集. 不妨设$\varphi(y)$为单调不减的，对$\forall\ \alpha\in\mathbb{R}^1$：设

$$b=\inf\{y\mid\varphi(y)\geqslant\alpha\}.$$

分两种情形：

(i) 若 $b\in\{y\mid\varphi(y)\geqslant\alpha\}$，则由 $\varphi(y)$的单调不减性知，

$$E[x\mid\varphi(f(x))\geqslant\alpha]=E[f(x)\geqslant b];$$

(ii) 若 $b\notin\{y\mid\varphi(y)\geqslant\alpha\}$，则

$$E[x\mid\varphi(f(x))\geqslant\alpha]=E[f(x)>b].$$

由 f 在 E 上可测知 $E[f(x)\geqslant b]$和 $E[f(x)>b]$可测.

综上所述，有 $E[x\mid\varphi(f(x))\geqslant\alpha]$可测. 再由 α 的任意性可知，$\varphi(f(x))$为 E 上的可测函数.

[4.62] 设 $mE<+\infty$，$f(x)$是 E 上几乎处处有限的可测函数. 则$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$ 有界可测函数 $g(x)$，使

$$mE[f(x)\neq g(x)]<\varepsilon.$$

证 设 $E_n=E[|f(x)|>n]$, $A=E[|f(x)|=+\infty]$. 则由于 $f(x)$几乎处处有限,可知 $mA=0$. 而我们显然有

$$E_n\supseteq E_{n+1}(n=1,2,\cdots), A=\prod_{n=1}^{\infty}E_n.$$

从而
$$\lim_{n\to\infty} mE_n=mA=0.$$

故 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ n_0$, 使 $mE_{n_0}<\varepsilon$.

作函数

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E-E_{n_0}\\ 0. & x\in E_{n_0}\end{cases}$$

则 $g(x)$可测且有界. 事实上,

$$|g(x)|\leqslant n_0,$$

且
$$E[f(x)\neq g(x)]=E_{n_0},$$

故

$$mE[f(x)\neq g(x)]\leqslant mE_{n_0}<\varepsilon.$$

从而 $g(x)$就是所求的有界可测函数.

[4.63] 设 $f(x)$为可测集 E 上几乎处处有限的函数,若$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists$ 连续函数 $\varphi(x)$,使

$$mE[f(x)\neq\varphi(x)]<\varepsilon.$$

则 $f(x)$为 E 上的可测函数.

证 只要证$\forall\ \alpha\in \mathrm{R}^1$, $E[f>\alpha]$可测即可.

对 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}>0(n=1,2,\cdots)$,由题设,存在连续函数 $\varphi_n(x)$,使得 $mE_n<\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$,其中

$$E_n=E[f(x)\neq\varphi_n(x)].$$

令 $M=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(E-E_n)$,且 $N=E-M$.

由于 $M\subseteq E$,所以 $E=M\cup N$.

则

$$mN = m(E-M) = m\left(E - \sum_{n=1}^{\infty}(E-E_n)\right)$$

$$= m\left(E \cdot \mathscr{S}\sum_{n=1}^{\infty}(E-E_n)\right)$$

$$= m\prod_{n=1}^{\infty} E\mathscr{S}(E-E_n)$$

$$= m\prod_{n=1}^{\infty} E \cdot E_n$$

$$= m\prod_{n=1}^{\infty} E_n \leqslant mE_n < \frac{1}{n} (\forall\ n).$$

由于上式对任意自然数 n 成立，故

$$mN \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad 即\ mN = 0.$$

又由于 $E = M \cup N$.

所以

$$E[f>\alpha] = M[f>\alpha] + N[f>\alpha]. \qquad (*)$$

但由 $mN=0$ 得 $mN[f>\alpha]=0$（$\because N[f>\alpha]\subseteq N$）.

而在 $E-E_n$ 上，$f(x)=\varphi_n(x)$，φ_n 连续，当然可测.

故

$$M[f>\alpha] = \sum_{n=1}^{\infty}\{x\in E-E_n \mid f(x)>\alpha\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\{x\in E-E_n \mid \varphi_n(x)>\alpha\}$$

可测.

从而由（*）式知，$E[f>\alpha]$ 可测，即 $f(x)$ 在 E 上可测.

[4.64] 设 $f(t)$ 是 $E=[a,b]$ 上的几乎处处有限的可测函数，则在 E 上存在单调不增函数 $g(t)$，使 $\forall\ x\in \mathrm{R}^1$：

$$mE[g(t)>x] = mE[f(t)>x].$$

证 第一步，令 $F(x)=mE[f(t)>x]$，则 $F(x)$ 具有下述性质：

(i) $F(-\infty) = mE[f(t)>-\infty] = mE = b-a$.

$$F(+\infty)=mE[f(x)>+\infty]=0$$
$$(\because mE[|f|=+\infty]=0).$$

(ii) $F(x)$是单调不增的函数. 因当 $x_1<x_2$ 时,若 $f(t)>x_2$,则 $f(t)>x_1$,所以

$$E[f(t)>x_1]\supseteq E[f(t)>x_2].$$

即有

$$mE[f(t)>x_1]\geqslant mE[f(t)>x_2].$$

亦即 $F(x_1)\geqslant F(x_2)$.

(iii) $F(x)$是右连续的. 因$\forall$ $x_0\in \mathrm{R}^1$ 及$\forall$ $\{x_n\}\downarrow x_0$,有

$$\begin{aligned}F(x_0)&=mE[f>x_0]\\&=m(E[f>x_n]+E[x_n\geqslant f>x_0])\\&=F(x_n)+mE[x_n\geqslant f>x_0].\end{aligned}\tag{1}$$

由于$\{x_n\}$单减且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 所以有

$$\prod_{n=1}^{\infty}E[x_n\geqslant f>x_0]=\varnothing.$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}mE[x_n\geqslant f>x_0]=0.$$

由(1)式知.

$$\lim_{n\to\infty}(F(x_0)-F(x_n))=0.$$

即 $F(x)$是右方连续的.

第二步,由上述讨论有:$b-a\geqslant F(x)\geqslant 0$,即

$$b\geqslant a+F(x)\geqslant a(-\infty<x<+\infty).$$

($x\to-\infty$时,$F+a=b$;$x\to+\infty$时,$F+a=a$.)

从而 $a+F(x)$是单调不增的右连续的函数.

令 $G(t)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\{x|a+F(x)>t\}$. 则 $G(t)$就是所求的函数. 首先,对$\forall$ $t\in(a,b)$,有$\{x|a+F(x)>t\}\neq\varnothing$. 事实上

$$\lim_{x\to-\infty}(a+F(x))=a+(b-a)=b.$$

由于 $t\in(a,b)$,故 $b>t$,即

$$\lim_{x\to-\infty}(a+F(x))=b>t$$

由极限的不等性,$\exists$ $x_0\in\mathrm{R}^1$,当 $x<x_0$ 时,有

$F(x)+a>t$，故$\{x|a+F(x)>t\}\neq\varnothing$.

其次，$\{x|a+F(x)>t\}$有上界. 由

$$\lim_{x\to+\infty}(a+F(x))=a,\ t\in(a,b),$$

故 $t>a$.

即
$$t>\lim_{x\to+\infty}(a+F(x)).$$

由极限的不等性，$\exists\ x_1\in\mathrm{R}^1$，当 $x>x_1$ 时，有

$$a+F(x)<t.$$

由于 $a+F(x)$的单调不增性，当 $x<x_1$ 时，有

$$a+F(x)>t.$$

所以，x_1 便是$\{x|a+F(x)>t\}$的一个上界.

故 $G(t)$在$[a,b](a\leqslant t\leqslant b)$上有定义.

第三步，$G(t)$是单调不增函数.

$\forall\ t_1、t_2\in[a,b]$，$t_1<t_2$，当 $x\in\{x|a+F(x)>t_2\}$时必有 $a+F(x)>t_1$，即 $x\in\{x|a+F(x)>t_1\}$.

$$\therefore\quad \{x|a+F(x)>t_2\}\subseteq\{x|a+F(x)>t_1\}.$$

于是

$$\sup\{x|a+F(x)>t_2\}\leqslant\sup\{x|a+F(x)>t_1\}.$$

即 $G(t_1)\geqslant G(t_2)$.

第四步，证明 $mE[t|G(t)>x]=mE[f(t)>x]$. 为方便起见，令

$$A=\{t|G(t)>x\}.\ B=\{t\in[a,F(x)+a)\}$$

(其中$[a,F(x)+a)$是半开半闭区间.)则首先可证

$$A=B.$$

事实上，若 $t_0\in A$，则 $G(t_0)>x$，由定义

$$G(t_0)=\sup_{a\leqslant t_0\leqslant b}\{x|F(x)+a>t_0\}.$$

必$\exists\ x_1$：$x<x_1<G(t_0)$，使

$$F(x_1)+a>t_0.$$

由于 F 为单调不增，且 $x<x_1$，所以有

$$t_0<F(x_1)+a\leqslant F(x)+a.$$

即 $t_0 \in [a, F(x)+a)$，亦即 $t_0 \in B$.

反之，若 $t_0 \in B$，即 $F(x)+a > t_0$. 则由 F 的右连续性，$\exists\ x_1 > x$，使得，$F(x_1)+a > t_0$.

故 $G(t_0) \geqslant x_1 > x$，即 $t_0 \in A$.

综上所述，我们得出

$$mE[G(t) > x] = m[a, F(x)+a)$$
$$= (F(x)+a) - a = F(x) = mE[f(t) > x].$$

而已证 $G(t)$ 是 $[a,b]$ 上有定义的单调不增的函数，所以 $G(t)$ 即为所求.

注　与本题第一步完全相同地可以证明：

若 $f(t)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数.

则 $F(x) = mE[f(t) \geqslant x]$ 为 R^1 上的单调不增的左连续函数，且满足

$$F(-\infty) = mE, F(+\infty) = 0.$$

[4.65]　设 $f(t)$ 是在 $E=[a,b]$ 上定义的几乎处处有限的可测函数，那么，$\exists$ 唯一的 h_0，使下列两个关系式都成立：

(1) $mE[f \geqslant h_0] \geqslant (b-a)/2$；

(2) 当 $h > h_0$ 时，$mE[f \geqslant h] < (b-a)/2$.

证　设 $F(x) = mE[f(t) \geqslant x]$，则由于 $F(x)$ 是 R^1 上的单调不增的左连续函数，（证法同[4.64]）且

$$F(-\infty) = b-a,\ F(+\infty) = 0.$$

令　$A = \{x \mid F(x) \geqslant (b-a)/2\}$，则有

(i) $A \neq \varnothing$；(ii) A 有上界.

事实上，因 $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = b-a$，取 $\varepsilon = \frac{1}{4}(b-a)$，则 $\exists\ M_0 < 0$，当 $x < M_0$ 时，

$$(b-a) - F(x) < \varepsilon = \frac{1}{4}(b-a).$$

所以

$$F(x) > \frac{3}{4}(b-a) > \frac{1}{2}(b-a)\ (\forall\ x \in (-\infty, M_0)).$$

即 $A\neq\varnothing$.

另外，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 知，$\exists\ M'_0\in\mathbb{R}^1$，当 $x\geqslant M'_0$ 时：

$$F(x)<\frac{1}{2}(b-a).$$

即当 $x\geqslant M'_0$ 时 $x\notin A$. 故 M'_0 是 A 的一个上界.

于是由(i)、(ii)知，令 $h_0=\sup A$. 则 h_0 显然存在. 从而$\exists\ \{x_n\}\subseteq A$，$x_n\uparrow$ 且 $x_0\longrightarrow h_0(n\to\infty)$. 当$\{x_n\}\subseteq A$ 时，$F(x_n)\geqslant(b-a)/2$. 由 $F(x)$的左连续性，有

$$F(h_0)=\lim_{n\to\infty}F(x_n)\geqslant\frac{1}{2}(b-a).$$

即

$$F(h_0)=mE[f\geqslant h_0]\geqslant\frac{1}{2}(b-a).$$

且因 A 是 $\mathbb{R}^1$ 中非空有界集，故其上确界 h_0 是唯一的. 这就证得(1).

下证，当 $h>h_0$ 时有 $mE[f\geqslant h]<(b-a)/2$.

若不然，则

$$F(h)=mE[f\geqslant h]\geqslant\frac{1}{2}(b-a),$$

从而 $h\in A$. 这与 $h_0(<h)$是 A 的上确界相矛盾.

故 $F(h)<\frac{1}{2}(b-a)$，这就证得(2).

第五章　积 分 理 论

内 容 提 要

［定义 5.1］（有界函数的勒贝格积分）设 $f(x)$ 是测度有限的点集 E 上的有界函数，$A\leqslant f(x)\leqslant B$. 如果 E 可表为一些互不相交的可测点集 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 之和，则称 $E=\sum_{i=1}^{n}E_i$ 为 E 的一个分划.

设 $E=\sum_{i=1}^{n}E_i^{*}$ 和 $E=\sum_{i=1}^{m}E_i^{**}$ 是 E 的两个分划，则称 $E=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}E_i^{*}E_j^{**}$ 是比前两个分划更细密的分划.

设分划 $D:E=\sum_{i=1}^{n}E_i$，且 $A_i=\inf_{E_i}\{f(x)\}$，$B_i=\sup_{E_i}\{f(x)\}$，$i=1,2,\cdots,n$. 则称 $s=\sum_{i=1}^{n}A_imE_i$ 与 $S=\sum_{i=1}^{n}B_imE_i$ 分别为 $f(x)$ 与分划 D 相关的小和数与大和数.

对于 E 的任一个分划 D，都有 $AmE\leqslant s\leqslant S\leqslant BmE$. 即全体小和数与全体大和数所成之数集都是有界集. 分别称 $\sup_{D}\{s\}$ 和 $\inf_{D}\{S\}$ 为 $f(x)$ 在 E 上的下积分和上积分，记作

$$\underline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x=\sup_{D}\{s\},\quad \overline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x=\inf_{D}\{S\}$$

若 $\underline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x$，则称 $f(x)$ 为在 E 上勒贝格可积的有界函数，上、下积分的共同值称为 $f(x)$ 在 E 上的勒贝格积分，记作

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \quad 或 \quad (L)\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

[定理 5.1] 设 D^* 是比 D 更细密的分划,s^* 和 S^* 是与 D^* 相关的小和数与大和数,s 与 S 是与 D 相关的小和数与大和数,则

$$s \leqslant s^* \leqslant S^* \leqslant S.$$

即"分划越细,小和不减,大和不增."

[定理 5.2] $\underline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x.$

[定理 5.3] $f(x)$ 为 E 上有界可积函数的充分必要条件是对任意 $\varepsilon>0$,恒有 E 的一个分划 D,使与之相关的大和数 S 与小和数 s,有 $0\leqslant S-s<\varepsilon$.

[定理 5.4] 若 $mE<+\infty$,则函数 $f(x)$ 在 E 上有界可积的充要条件是 $f(x)$ 在 E 上有界可测.

[定理 5.5] 若有界函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上黎曼可积,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是勒贝格可积的,且二者积分值相等,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点所成之集测度为零.

注 此定理在实际计算勒贝格积分时经常用到,是计算勒贝格积分的主要方法之一.

[定理 5.6] 设 $f(x)$,$g(x)$ 都是测度有限的可测集 E 上的可测函数,$A\leqslant f(x)\leqslant B$,则

(1) $A \cdot mE\leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant B \cdot mE$.(积分平均值)特别,当 $f(x)\equiv C$ 时,$\int_E f(x)\mathrm{d}x = C \cdot mE$($C$ 为常数).当 $mE=0$ 时,$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(2) $af(x)+bg(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 E 上有界可积(a,b 为任何实数).

(3) 若 $f(x)\geqslant 0$,$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$,则 $f(x)=0$ a,e 于 E.

(4) 若 $f(x)\leqslant g(x)$ a、e 于 E,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x \quad \text{（积分的单调性）}$$

［定义 5.2］（非负函数的积分定义）设 $f(x)\geqslant 0$，是测度有限的可测集合 E 上的函数，对任意正整数 n，作 $f(x)$ 的截断函数

$$\{f(x)\}_n = \begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x) \leqslant n \text{ 时} \\ n. & \text{当 } f(x) > n \text{ 时} \end{cases}$$

则 $\{f(x)\}_n$ 为有界函数，且 $\{f((x)\}_n \leqslant \{f(x)\}_{n+1}$.

若对任何正整数 n，$\{f(x)\}_n$ 都有界可积，则称 $f(x)$ 在 E 上有积分值，其值为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E \{f(x)\}_n \mathrm{d}x$$

当其极限值有限时，称 $f(x)$ 为 E 上的非负可积函数.

注　因 $\{f(x)\}_n \leqslant \{f(x)\}_{n+1}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E \{f(x)\}_n \mathrm{d}x$ 总是存在的（可能为 $+\infty$），显然 $f(x)$ 有积分值的充要条件是 $f(x)$ 非负可测.

［定义 5.3］（一般函数的积分定义）对于测度有限的可测集合 E 上的函数 $f(x)$，令

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x) \geqslant 0 \text{ 时} \\ 0. & \text{当 } f(x) < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{当 } f(x) \leqslant 0 \text{ 时} \\ 0. & \text{当 } f(x) > 0 \text{ 时} \end{cases}$$

则 $f^+(x)$，$f^-(x)$ 均为 E 上的非负函数，如果 $f^+(x)$，$f^-(x)$ 都在 E 上有积分值，且不同时为无限大，则称 $f(x)$ 在 E 上有积分值，其值为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x.$$

若 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 都有限，则称 $f(x)$ 是 E 上的可积函数. E 上可积函数的全体记为 $L(E)$.

显然 $f(x)$ 有积分值的必要条件是 $f(x)$ 可测（并非充分条件）.

［定理 5.7］ 积分和可积函数的一些性质.

(1) 若 $mE=0$,则 E 上的任何函数 $f(x)$ 都是可积的,并且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(2)(积分的有限可加性)若 $f(x)$ 分别是 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 上的可积函数,且 $E_iE_j=\varnothing(i\neq j)$,则 $f(x)$ 也是 $E=\sum\limits_{i=1}^{n}E_i$ 上的可积函数,且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{E_i} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 若 $f(x)=g(x)a.e$ 于 E,$g(x)$ 在 E 上可积,则 $f(x)$ 也在 E 上可积,且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

注 此结论告诉我们这样一个事实:在一个测度为零的集合(简称零测集)上改变函数值,既不影响函数的可积性,也不改变其积分值.

(4) 若 $f(x)$ 在 E 上可积,则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限.

(5) 设 $f(x),g(x)$ 都在 E 上可积,a,b 为任何实数,则 $af(x)+bg(x)$ 也在 E 上可积,且

$$\int_E [af(x) + bg(x)]\mathrm{d}x = a\int_E f(x)\mathrm{d}x + b\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(6) 设 $f(x)$ 在 E 上可测,则

(i) $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是 $|f(x)|$ 在 E 上可积(积分的绝对可积性).

(ii) 当 $f(x)$ 在 E 上可积时,有

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

(7) 若 $f(x)$ 在 E 上可测,$g(x)$ 在 E 上可积,且 $g(x)\geqslant 0$,$|f(x)|\leqslant g(x)$,则 $f(x)$ 在 E 上可积.

(8) 设 $f(x)$ 在 E 上可积,$E_1,E_2,\cdots$ 是一串两两不相交的可测

集，$E=\sum_{i=1}^{\infty}E_i$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{E_i}f(x)\mathrm{d}x$$

（积分的完全可加性）.

(9) 若 $f(x)$ 在 E 上可积，则对 $\forall\ \varepsilon>0$，恒有 $\delta>0$，使当 $A\subseteq E$，$mA<\delta$ 时，$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$（积分的绝对连续性）.

[定理 5.8] （勒贝格有界收敛定理）设 $mE<+\infty$，

(1) $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列；

(2) $\{f_n(x)\}$ 一致有界，即有常数 $M>0$，使对一切 n 及一切 $x\in E$ 有 $|f_n(x)|\leqslant M$；

(3) $f_n(x)\Rightarrow f(x)$；

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

注 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\ a.e$ 于 E，必有 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，所以条件(3)换为 $f_n(x)\to f(x)\ a.e$ 于 E，结论当然成立.

[定理 5.9] （勒贝格基本定理）若 $mE<+\infty$，

(1) $\{f_n(x)\}$ 在 E 上非负可测；

(2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$，

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

注 1° 若 $mE<+\infty$，$f(x)$ 在 E 上有积分值，$E=\sum_{i=1}^{\infty}E_i$，E_1，E_2，…是一串互不相交的可测集，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x.$$

2° 定理并没有假设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是可积的，只要非负可测函数项级数，就可以逐项积分.

[定理 5.10] (勒维定理)若 $mE<+\infty$,

(1) $\{f_n(x)\}$是 E 上的非负可测函数列;

(2) $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$;

(3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$,

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

[定理 5.11] (法都引理)若 $mE<+\infty$,$\{f_n(x)\}$是 E 上的非负可测函数列,则

$$\int_E[\varliminf_{n\to\infty}f_n(x)]\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

[定理 5.12] (维他利定理)若 $mE<+\infty$,

(1) $\{f_n(x)\}$是 E 上的可积函数列;

(2) $f_n(x)\Rightarrow f(x)$;

(3) $f_n(x)$的积分具有等度的绝对连续性;则 $f(x)$是可积的,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

注 称函数 $g(x)$的积分具有等度的绝对连续性是指,对 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使对任意 A,$mA<\delta$,有$\left|\int_A g(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

[定理 5.13] (勒贝格控制收敛定理)设 $mE<+\infty$,

(1) $F(x)$是 E 上的可积函数;

(2) $\{f_n(x)\}$是 E 上的可测函数列;

(3) $|f_n(x)|\leqslant F(x)(n=1,2,\cdots)$;

(4) $f_n(x)\Rightarrow f(x)$,

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

注 1° $F(x)$称为控制函数.

2° 将条件(4)换为 $f_n(x)\to f(x)a.e$ 于 E,结论更成立.

以上所有定义和定理都假定 $mE<+\infty$,以下的定义将去掉

这种假定.

[定义 5.4] 设 $f(x)$是 n 维空间 R 上的非负函数,又对每一正整数 $i\leqslant n$,$\{a_k^{(i)}\}$,$\{b_k^{(i)}\}$是二实数序列,且

$$0\geqslant a_1^{(i)}\geqslant a_2^{(i)}\geqslant\cdots\geqslant a_k^{(i)}\geqslant\cdots$$

$$0\leqslant b_1^{(i)}\leqslant b_2^{(i)}\leqslant\cdots\leqslant b_k^{(i)}\leqslant\cdots$$

$$\lim_{k\to\infty}a_k^{(i)}=-\infty,\lim_{k\to\infty}b_k^{(i)}=+\infty\ (i=1,2,\cdots,n)$$

令
$$R_k=R[x\,|\,a_k^{(i)}\leqslant x\leqslant b_k^{(i)},i=1,2,\cdots,n]$$

则

$$R_1\subseteq R_2\subseteq\cdots\subseteq R_k\subseteq\cdots$$

如果对于每一 $R_k(k=1,2,\cdots)$,$f(x)$在 R_k 上都有积分值,显然有

$$\int_{R_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{R_{k+1}}f(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $f(x)$在 R 上有积分值,其值为

$$\int_R f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{R_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)$在 R 上的积分值有限时,称 $f(x)$为 R 上的非负可积函数.

注 可以证明上述定义中 $f(x)$的积分值并不因为二实数序列$\{a_k^{(i)}\}$,$\{b_k^{(i)}\}$的选取的不同而不同,因此定义是有实际意义的.

[定义 5.5] 设 $f(x)$是定义在 n 维空间 R 上的函数,令

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x),\text{当 } f(x)\geqslant 0\text{ 时}\\0.\qquad\text{当 } f(x)<0\text{ 时}\end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases}-f(x),\text{当 } f(x)<0\text{ 时}\\0.\qquad\text{当 } f(x)\geqslant 0\text{ 时}\end{cases}$$

如果 $f^+(x)$和 $f^-(x)$都有积分值$\int_R f^+(x)\mathrm{d}x$和$\int_R f^-(x)\mathrm{d}x$,且不同时为无限大,则称函数 $f(x)$ 在 R 上有积分值,其值为

$$\int_R f(x)\mathrm{d}x=\int_R f^+(x)\mathrm{d}x-\int_R f^-(x)\mathrm{d}x.$$

如果$\int_R f^+(x)\mathrm{d}x$和$\int_R f^-(x)\mathrm{d}x$都有限，则称$f(x)$为R上的可积函数.

在以上两定义之下，除勒贝格控制收敛定理外，以前的许多定理都成立，在此不再赘述.

[定理 5.14] 若E是$\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q=\mathrm{R}^{p+q}$中的可测集，$m(x)=mE_x$，则$m(x)$是$\mathrm{R}^p$上几乎处处有定义的可测函数，且

$$mE=\int_{R^p}m(x)\mathrm{d}x.$$

注 E_{x_0}表示R^q中所有使$(x_0,y)\in E$的y所作成的集合，称E_{x_0}为以超平面$x=x_0$截E所得的截口，此处

$$x_0=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{p0})\in R^p,y=(y_1,y_2,\cdots,y_q)\in R^q$$

$$(x_0,y)=(x_{10},x_{20},\cdots,x_{p0},y_1,y_2,\cdots,y_q)\in R^{p+q}.$$

[定理 5.15] (傅必尼定理)设$f(x,y)$是在$R^{p+q}=R^p\times R^q$上的可积函数，则

(1) $f(x,y)$(在R^p上)是y的几乎处处可积的函数；

(2) 几乎处处有定义的函数

$$g(x)=\int_{R^q}f(x,y)\mathrm{d}y$$

在R^p上可积，且有下述等式成立：

$$\int_{R^{p+q}}f(T)\mathrm{d}T=\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

推论 (1)若$f(x,y)$在$\mathrm{R}^{p+q}=\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q$上可积，则

$$\int_{\mathrm{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathrm{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathrm{R}^q}\mathrm{d}y\int_{\mathrm{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 若$f(T)$非负可测，则几乎对所有的$x\in\mathrm{R}^p$，$f(x,y)$是y的非负可测函数，且下述等式成立：

$$\int_{R^{p+q}}f(T)\mathrm{d}T=\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{R^q}\mathrm{d}y\int_{R^p}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

[定义 5.6] 设$F(x)=F_1(x)+iF_2(x)$是E上的复函数，如果$F_1(x)$，$F_2(x)$都在E上可积，则称$F(x)$在E上可积，且

$$\int_E F(x)\mathrm{d}x = \int_E F_1(x)\mathrm{d}x + i\int_E F_2(x)\mathrm{d}x.$$

[定义 5.7] 设 $f(x)$是定义在实直线 R^1 中的点集 A 上的有限函数，如果对 A 中任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，不等式

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

成立，则称 $f(x)$是 A 上的单调增加函数. 如果 $f(x_1)<f(x_2)$成立，则称 $f(x)$是 A 上严格增加函数，如果当 $x_1<x_2$ 时，不等式

$$f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

成立，则称 $f(x)$是 A 上单调下降函数，如果 $f(x_1)>f(x_2)$成立，则称 $f(x)$是 A 上严格单调下降函数，单调增加函数和单调下降函数统称为单调函数. 另外，关于任何函数右方跳跃度，左方跳跃度，第一类不连续点，第二类不连续点都与数学分析中的有关定义类似.

[定理 5.16] 设 $f(x)$是$[a,b]$上的单调增加函数，那么

(1) $f(x)$的不连续点全是第一类不连续点；

(2) $f(x)$的不连续点的全体至多是可列集；

(3) $f(x)$在不连续点的左、右方的跳跃度都是非负的，且所有跳跃度的总和不超过 $f(b)-f(a)$.

(4) $f(x)$在$[a,b]$上必是黎曼可积的.

[定义 5.8] 对于区间$[a,b]$上的函数 $f(x)$，设

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

是$[a,b]$的一组分点，它所形成的分划用 P 表示，令

$$V_a^b[f,P] = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

如果对任意分划 P，存在 $M>0$，使 $V_a^b[f,P]\leqslant M$，则称 $f(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数（或囿变函数）. M 的下确界称为 $f(x)$在$[a,b]$上的全变差，记为 $V_a^b(f)$.

显然，若 $f(x)$为$[a,b]$上的单调函数，则 $f(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数，且 $V_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$.

如果 $f(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数，$a<c<b$，则 $f(x)$也是

$[a,c]$上的有界变差函数，令

$$V(x) = V_a^x(f)$$

则 $V(x)$在$[a,b]$上有定义，且 $V(x)$在$[a,b]$上单调不减，称 $V(x)$为 $f(x)$在$[a,b]$上的全变差函数，区间$[a,b]$上全体有界变差函数的集合记为 $V[a,b]$.

[定理 5.17] 有界变差函数具有以下一些性质：

(1) $f\in V[a,b]$时，f 必是有界函数；

(2) $f\in V[a,b]$，$g\in V[a,b]$，α,β 为任意常数，则 $\alpha f+\beta g\in V[a,b]$，且 $V_a^b[\alpha f+\beta g]=|\alpha|V_a^b(f)+|\beta|V_a^b(g)$；

(3) $f\in V[a,b]$，$g\in V[a,b]$，则 $fg\in V[a,b]$；

(4) $f\in V[a,b]$，且 $V_a^b(f)=0$，则 f 为$[a,b]$上的常量函数；

(5) 设$[c,d]\subset[a,b]$，$f\in V[a,b]$，那么，把 $f(x)$限制在$[c,d]$上时，$f\in V[c,d]$；

(6) $f\in V[a,b]$，对任何 $a<c<b$，有

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f);$$

(7) 如果 $g_n\in V[a,b]$，$n=1,2,\cdots$，$\{V_a^b(g_n)\}$有界，且 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)$，则 $g\in V[a,b]$，并且

$$V_a^b(g) \leqslant \sup_n V_a^b(g_n).$$

[定理 5.18] $f\in V[a,b]$的充要条件是 $f(x)$可表示为两个非负不减函数之差.

[定义 5.9] 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的有界函数，$x_0\in[a,b]$，对任意 $\delta>0$，令

$$M_\delta(x_0) = \sup_{\substack{x\in[a,b]\\0<|x-x_0|<\delta}} [f(x)],$$

$$m_\delta(x_0) = \inf_{\substack{x\in[a,b]\\0<|x-x_0|<\delta}} [f(x)],$$

则 M_δ 随 δ 的减小而不增，m_δ 随 δ 的减小而不减，因而当 $\delta\to0^+$ 时，M_δ 和 m_δ 都有极限，分别称此极限为 $x\to x_0$ 时 $f(x)$的上极限和下极限，记作

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x) = \lim_{\delta\to0^+} M_\delta,\quad \underline{\lim_{x\to x_0}}f(x) = \lim_{\delta\to0^+} m_\delta.$$

[定义 5.10] 对函数 $f(x)$ 及定点 x_0，设

$$D^+f(x_0)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D_+f(x_0)=\underline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D^-f(x_0)=\overline{\lim_{h\to 0^-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D_-f(x_0)=\underline{\lim_{h\to 0^-}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};$$

则 D^+,D_+,D^-,D_- 分别称为 $f(x)$ 在 x_0 处的右上，右下，左上，左下导数(或导出数).

若 $D^+f(x_0)=D_+f(x_0)=D^-f(x_0)=D_-f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 可导或可微，记为

$$f'(x_0)=D^+f(x_0)=D_+f(x_0)=D^-f(x_0)=D_-f(x_0).$$

[定理 5.19] 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，点 $x\in[a,b]$，那么 $f(x)$ 在点 x 具有有限导数的充要条件是：存在有限数 $f'(x)$，使得对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $x'\in[a,b]$，$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有不等式

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

[定理 5.20] (傅必尼定理)设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的单调增加的函数列，并且函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ 在区间 $[a,b]$ 上处处收敛于 f，那么

$$f'=\sum_{n=1}^{\infty}f_n'.$$

几乎处处成立.

[定理 5.21] (勒贝格定理)若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，且 $f'(x)$ 可积.

推论 有界变差函数几乎处处可微.

[定义 5.11] 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，如果对 $\forall\ \varepsilon>0$，

$\exists\ \delta>0$,使当$\{(a_i,b_i)\}$是$[a,b]$上任意有限个互不相交的开区间,其总长度$\sum\limits_i(b_i-a_i)<\delta$时,成立不等式

$$\sum_i|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon,$$

则称$f(x)$为$[a,b]$上的全连续函数(或绝对连续函数).

[定理 5.22] (1) $[a,b]$上的全连续函数必为一致连续函数;

(2) 两个全连续函数的线性组合与乘积仍为全连续函数;

(3) $[a,b]$上的全连续函数必为有界变差函数;

(4) 设$f(x)$是$[a,b]$上的全连续函数,$f'(x)$在$[a,b]$上几乎处处为零,则$f(x)=c$(c为常数).

[定义 5.12] 设$f(x)$是$[a,b]$上的可积函数,对$x\in[a,b]$,令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+c\quad(c\text{ 为任意常数})$$

则称$F(x)$为$f(x)$的不定积分.

[定理 5.23] (1) 若$f\in L[a,b]$,则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是全连续函数;

(2) 若$f(x)$在$[a,b]$上全连续,则$f'(x)\in L[a,b]$,

且
$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a);$$

(3) 若$f(x)\in L[a,b]$,则存在全连续函数$F(x)$,

使得
$$F^1(x)=f(x)a.e\text{ 于}[a,b],$$

且
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a);$$

(4) 设$f(x)$在$[a,b]$上全连续,$g'(x)\in L[a,b]$,则有分部积分公式:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

[定义 5.13] 设函数$\mu(x)$在直线上的点集E上单调增加且右方连续,每一串覆盖E的开区间族$\{(a_i,b_i)\}$都定义一个非负的数

$$U = \sum_{i=1}^{\infty}[\mu(b_i) - \mu(a_i)].$$

所有 u 所成之集是下方有界的，则称$\inf\{u\}$为对于分布函数 $\mu(x)$ 而言的外测度，记为 $m_\mu^*(E)$.

若对任何点集 T，有

$$m_\mu^*(T) = m_\mu^*(TE) + m_\mu^*(T\mathscr{C}E),$$

则称 E 是关于 μ 的勒贝格-司蒂阶可测集，简称为 μ-可测集，其测度记为 $m_\mu E$，所有 μ-可测集类用 L^μ 表示.

[定理 5.24] 任何区间$(a,b]$,(a,b),$[a,b)$,$[a,b]$都是 μ—可测集，且

$$m_\mu(a,b] = \mu(b) - \mu(a),$$

$$m_\mu[a,b) = \mu(b-0) - \mu(a-0),$$

$$m_\mu(a,b) = \mu(b-0) - \mu(a),$$

$$m_\mu[a,b] = \mu(b) - \mu(a-0).$$

注 1° 一点 a 的测度定义为 $m_\mu(a)=\mu(a+0)-\mu(a-0)$；

2° 约定 $\mu(a)=\mu(a-0)$，$\mu(b)=\mu(b+0)$；

3° 如此定义的 μ-可测集与以前定义的 L 可测集有一切相关的性质；

4° 在直线上的点集 E 上定义的 m_μ 测度，可推广为任何空间上的集(包括乘积空间).

[定义 5.14] 设 $f(x)$是 μ-可测集 E 上的非负函数，若对任何实数 a，$E[x|f(x)>a]$皆是 μ-可测集，则称 $f(x)$为 μ-可测函数，若 $f(x)$是 μ-测度有限的点集 E 上的有界可测函数，E 的每一个分划所确定的大和数与小和数为

$$S = \sum_{i=1}^{n} B_i m_\mu(E_i), \quad s = \sum_{i=1}^{n} A_i m_\mu(E_i).$$

此处 $E=\sum_{i=1}^{n} E_i$，E_i μ-可测，$E_iE_j=\varnothing$，$(i\neq j)$，B_i，A_i 分别为 $f(x)$在 E_i 上的上、下确界，称

$$\overline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x = \inf\{S\}, \quad \underline{\int_E} f(x)\mathrm{d}x = \sup\{s\}$$

为 $f(x)$ 在 E 上的上积分和下积分，当上积分与下积分相等时，称 $f(x)$ 为 E 上的勒贝格-司蒂阶可积函数，简记为 L-S 可积，其积分值为上积分和下积分的共同值. 记为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) \text{ 或 } (LS)\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x).$$

注 如此定义的可测函数，可积函数及积分理论，都与 L 可测函数，L 可积函数及勒贝格积分理论有平行的性质.

[定义 5.15] 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，在每一个子区间上取一点 $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$，作

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)]$$

当 $\lambda=\max\limits_k(x_{k+1}-x_k)\to 0$ 时，σ 趋于有限定值 I，且 I 与 $[a,b]$ 的分划和 ξ_k 的取法无关，则称 I 为 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 的黎曼-司蒂阶积分，记为

$$I = (RS)\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

注 $(RS)\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ 同样可以用大小和数与上下积分来定义.

问题解答

一、回答问题并说明理由

[5.1] 若 $f(x)$ 为 E 上可积函数，则 $f^2(x)$，$\dfrac{1}{f(x)}$ 在 E 上是否可积？

解 不一定.

例如：$E=[0,1]$

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}, x\in(0,1] \\ 0. \quad x=0,\end{cases}$ 则

$$\{f(x)\}_n=\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}} & \dfrac{1}{n^2}\leqslant x\leqslant 1 \\ n & 0<x<\dfrac{1}{n^2}\end{cases}$$

$f(x)$为 E 上非负可测函数,其积分值为

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1\{f(x)\}_n\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\frac{1}{n^2}} n\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{n^2}}^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+2-\frac{2}{n}\right]=2.\end{aligned}$$

故 $f(x)$在$[0,1]$上可积,但

$$f^2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\in(0,1] \\ 0. \quad x=0\end{cases}$$

却在$[0,1]$上不可积,事实上

$$\left\{\frac{1}{x}\right\}_n=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1 \\ n. \quad 0<x<\dfrac{1}{n}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left\{\frac{1}{x}\right\}_n\mathrm{d}x &\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\ln x\Big|_{\frac{1}{n}}^1=\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty.\end{aligned}$$

(2) 又如 $f(x)=x, x\in(0,1]=E$,为可积函数,而$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$,$x\in(0,1]=E$,由(1)即知$\dfrac{1}{f(x)}$为不可积函数.

[5.2] 下述论断是否正确?正确的加以证明,错误的举出反例.

(1) 若 E 为$[a,b]$上测度为零的子集合,则其特征函数$\chi_E(t)$

在$[a,b]$上(R)可积.

解 不正确.

例如,E为$[a,b]$上所有有理点所组成的集合,则$mE=0$,

$$\chi_E(t)=\begin{cases}1, & t\in E\\ 0. & t\in[a,b]-E\end{cases}$$

故$\chi_E(t)$实为$[a,b]$上的狄里克雷函数,所以$\chi_E(t)$在$[a,b]$上不是(R)可积的.

(2) 若E为$[a,b]$上的疏朗集,则$\chi_E(t)$在$[a,b]$上(R)可积.

解 不正确.

例如,设E是$[a,b]$中具有正测度的完备的疏朗集,而

$$\chi_E(t)=\begin{cases}1, & t\in E\\ 0. & t\in[a,b]-E\end{cases}$$

因$\chi_E(t)$的不连续点之集为E,且$mE>0$,由于任一函数黎曼可积的充要条件是其不连续点所成之集的测度为零(此结论我们将在题[5.60]中给出证明),故$\chi_E(t)$在$[a,b]$上不是(R)可积的.

(3) 若E为$[a,b]$上测度为零的疏朗集,则$\chi_E(t)$在$[a,b]$上是(R)可积的.

解 不正确.

设F是闭区间$[a,b]$上测度为$\frac{1}{2}$的完备疏朗集,E是F的一切邻区间端点之集,则E为疏朗集,且E为至多可列集,故$mE=0$,而

$$\chi_F(t)=\begin{cases}1, & t\in E\\ 0. & t\in[a,b]-E\end{cases}$$

由于$\chi_E(t)$不连续点之集为F,且$mF=\frac{1}{2}>0$,故$\chi_E(t)$不是(R)可积的.

(4) 若E为$[a,b]$上测度为零的闭集,则$\chi_E(t)$在$[a,b]$上(R)可积.

解 结论是正确的.

因为

$$\chi_E(t)=\begin{cases}1, & t\in E\\ 0. & t\in[a,b]-E\end{cases}$$

是$[a,b]$上的有界函数,E为闭集,且$mE=0$,由直线上闭集的构造知,$E=[a,b]-\sum_{i=1}^{\infty}I_i$,其中$I_i$为互不相交的开区间.而在每一$I_i$上,$\chi_E(t)=0$,故$\chi_E(t)$在$\sum_{i=1}^{\infty}I_i$上连续.故$\chi_E(t)$不连续点就必在$E$的边界上,又因$E$为闭集,$E'\subseteq E$,且$mE=0$,故$mE'=0$,即$\chi_E(t)$的不连续点为至多可列集,所以,$\chi_E(t)$在$[a,b]$上$(R)$可积.

[5.3] 设$f(x)$,$g(x)$都是E上的可测函数,$mE<\infty$,$g(x)$可积,且$f(x)\leqslant g(x)a.e$于E,问$f(x)$是否可积?

解 $f(x)$不一定可积.

(i) 若$f(x)$非负可测,且$f(x)\leqslant g(x)$,其中$g(x)$可积,则由控制积分定理知$f(x)$一定可积.

(ii) 若取消$f(x)$的非负性,则不然.

例如,$E=[0,1]$,$g(x)\equiv1$,则$g(x)$在E上可积,取

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1]\\ 0. & x=0\end{cases}$$

则$f(x)\leqslant g(x)$,但$f(x)$在$[0,1]$上不可积.

[5.4] 设$f(x)$,$g(x)$是E上的可测函数,$g(x)\in L(E)$,且$f(x)\leqslant g(x)a.e$于E,问$f(x)$是否可积.

解 $f(x)$不一定可积.

(i) 当$f(x)$为非负可测函数时,即

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x),$$

则$f(x)$必为可积函数.

(ii) 在一般情况下,$f(x)$未必可积.

例如,令$E=[0,1]$,$g(x)=0$.

$$f(x)=\begin{cases}-2 & x\in\left(\frac{1}{2},1\right] \\ -4 & x\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] \\ \cdots & \cdots \\ -2^n & x\in\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ \cdots & \cdots \\ 0 & x=0\end{cases}$$

则有 $f(x)\leqslant g(x)$，且 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 0$，即 $g(x)\in L[0,1]$，但 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}(-2^k)\cdot\frac{1}{2^k}=-\infty$，即 $f(x)$ 在$[0,1]$上不可积.

二、康托集上的积分及无界函数的积分

[5.5] 设 P_0 为[0,1]上的康托集，

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in P_0 \\ 2. & x\in[0,1]-P_0\end{cases}$$

试计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解法一 令 $G_0=[0,1]-P_0$，

则
$$mG_0=1-mP_0=1,$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_{P_0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{G_0} f(x)\mathrm{d}x \\ &= 1\cdot mP_0+2\cdot mG_0 \\ &= 1\cdot 0+2\cdot 1=2.\end{aligned}$$

解法二 由于 $mP_0=0$，设 $g(x)=2, x\in[0,1]$，

则
$$f(x)=g(x)\, a.e \text{ 于}[0,1]$$

故
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2\mathrm{d}x=2.$$

[5.6] 在[0,1]上定义 $f(x)$：在康托集 P_0 中的点 x，有 $f(x)=0$；在 P_0 的邻区间(α_n,β_n)的中点 $x=\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$，有 $f(x)=1$；

$x\in\left[\alpha_n,\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)$ 与 $x\in\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2},\beta_n\right]$时，$f(x)$为线性的. 试计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解 将[0,1]分成两两不相交的集之和：

$$[0,1]=P_0+(\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_2,\beta_2)+\cdots+(\alpha_n,\beta_n)+\cdots$$

由康托集的构造知，$G_1=(\alpha_1,\beta_1)$是一个长为$\frac{1}{3}$的区间，$G_2=(\alpha_2,\beta_2)\cup(\alpha_3,\beta_3)$是 2^1 个长为$\frac{1}{3^2}$的区间的并，$G_3=(\alpha_4,\beta_4)\cup\cdots\cup(\alpha_7,\beta_7)$是 2^2 个长为$\frac{1}{3^3}$的区间之并，……，G_n 是 2^{n-1}个长度为$\frac{1}{3^n}$的区间之并，……. 由积分的完全可加性得：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{P_0} f(x)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

因 $mP_0=0$，所以 $\int_{P_0} f(x)\mathrm{d}x=0$，又由于 $f(x)$在(α_n,β_n)上曼黎可积，因此

$$(L)\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\mathrm{d}x=(R)\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

等于相应三角形的面积.

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\frac{1}{3}}{2},\quad \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\frac{1}{3^2}}{2},$$

$$\int_{\alpha_4}^{\beta_4} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha_5}^{\beta_5} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha_6}^{\beta_6} f(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha_7}^{\beta_7} f(x)\mathrm{d}x=\frac{\frac{1}{3^3}}{2},$$

……

求和得：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}.$$

[5.7] 设函数 $f(x)$ 在康托集 P_0 上的点等于 x^2，又在长为 $\frac{1}{3^n}$ 的那些邻区间上等于 $\frac{1}{2^n}$，试计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解 将积分区间[0,1]分为两两不相交的集 $P_0, A_1, A_2, \cdots$，其中 P_0 是康托集，A_k 是一切长为 $\frac{1}{3^k}$ 的邻区间之并，利用积分完全可加性得：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{P_0} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $mP_0=0$，所以 $\int_{P_0} f(x)\mathrm{d}x=0$，又对任何正整数 k，A_k 是一切长为 $\frac{1}{3^k}$ 的邻区间之并，故 A_k 有 2^{k-1} 个长为 $\frac{1}{3^k}$ 的区间，所以

$$\int_{A_k} f(x)\mathrm{d}x = \int_{A_k}\frac{1}{2^k}\mathrm{d}x = \frac{1}{2^k}mA_k = \frac{1}{2^k}\cdot\frac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{2\cdot 3^k}$$

因而

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^k} = \frac{1}{4}.$$

[5.8] 若在康托集 P_0 上的点有 $f(x)=x^{10}$，而在 P_0 的邻区间上函数的图形是以这些邻区间的长为直径所作的圆周的上半圆周，试计算

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

解 用 (α_n, β_n) 表示康托集 p_0 的邻区间，不妨设这些邻区间按其长度减少的次序来排列，于是

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{P_0} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

由于 $\int_{P_0} f(x)\mathrm{d}x = 0$，在 (α_n, β_n) 上 $f(x)$ 的图形是以邻区间为直径的上半圆周，故半径 $r_n = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2}$，且在 (α_n, β_n) 上的积分等于半径

为 $r_n = \frac{\beta_n - \alpha_n}{2}$ 的半圆面积，于是

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\beta_n - \alpha_n}{2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{8}(\beta_n - \alpha_n)^2$$

由康托集的构造知：

$\beta_1 - \alpha_1 = \frac{1}{3}$　（2^0个）

$\beta_2 - \alpha_2 = \beta_3 - \alpha_3 = \frac{1}{3^2}$　（2^1 个）

$\beta_4 - \alpha_4 = \cdots = \beta_7 - \alpha_7 = \frac{1}{3^3}$　（2^2 个）

$\beta_8 - \alpha_8 = \cdots = \beta_{15} - \alpha_{15} = \frac{1}{3^4}$　（2^3 个）

…　…

因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2^2}{3^6} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^{2n}} + \cdots\right] \\ &= \frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{9}\left[1 + \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} + \cdots\right] \\ &= \frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{7} = \frac{\pi}{56}.\end{aligned}$$

[5.9]　设 $f(x)$在康托集 P_0 上为 0，而在 P_0 的补集 G_0 中长为$\frac{1}{3^n}$的构成区间上 $f(x)$为 n，求积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解　令 G_n 为 G_0 中长为$\frac{1}{3^n}$的各开区间之并，则 G_n 有 2^{n-1}个长为$\frac{1}{3^n}$的开区间，且 $G_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$，$mG_n = 2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n}$，由题意知

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in P_0 \\ n, & x \in G_n \quad (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

由积分的完全可加性知：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{P_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{G_0} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{P_0} 0\mathrm{d}x + \int_{\sum\limits_{n=1}^{\infty} G_n} n\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} n\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot mG_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \cdot n \cdot \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \tag{1}$$

令

$$S_N = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{N} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

则

$$\frac{2}{3} S_N = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{N} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3} = \sum_{n=1}^{N} n \cdot \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

$$S_N - \frac{2}{3} S_N = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{3^N} + N \cdot \frac{2^N}{3^{N+1}}.$$

即
$$\frac{1}{3} S_N = \frac{\frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N\right]}{1 - \frac{2}{3}} + N \cdot \frac{2^N}{3^{N+1}}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N\right] + N \cdot \frac{2^N}{3^{N+1}}.$$

由于

$$3^n = (2+1)^n = 2^n + n \cdot 2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^{n-2} + \cdots$$

$$> \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^{n-2}$$

故

$$0 \leqslant \frac{n \cdot 2^n}{3^{n+1}} < \frac{n \cdot 2^n}{3^n} < n \cdot 2^n \Big/ \left[\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^{n-2}\right] = \frac{8}{n-1} \to 0 \, (n \to \infty).$$

从而

$$\frac{1}{3} \lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N\right] + \lim_{N \to \infty} N \cdot \frac{2^N}{3^{N+1}} = 1.$$

即
$$\lim_{N \to \infty} S_N = 3.$$

由(1)知

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} S_N = 3.$$

[5.10] 设集 E 是从 $[0,1]$ 中去掉开区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$，$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{5}\right)$，$\left(\frac{1}{8},\frac{1}{7}\right)$，…，$\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right)$，…而成，计算函数 $y=3x^2$ 在 E 上的积分.

解 由题意知，集 E 是闭区间 $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$，$\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right]$，$\left[\frac{1}{7},\frac{1}{6}\right]$，…，$\left[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right]$，…以及 $\{0,1\}$ 的并集，在每一个闭区间上函数黎曼可积，因此，

$$\begin{aligned}\int_E 3x^2\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 3x^2\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} 3x^2\mathrm{d}x + \cdots + \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n}} 3x^2\mathrm{d}x + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}\right) + \cdots \\ &\quad + \left[\frac{1}{(2n)^3}-\frac{1}{(2n+1)^3}\right] + \cdots\end{aligned}$$

由数学分析的知识易判断，这个级数是绝对收敛的.

[5.11] 设 E 是 $[a,b]$ 的可测子集，则 E 的特征函数 $\chi_E(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b \chi_E(x)\mathrm{d}x = mE.$$

证 由于

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in [a,b]-E \end{cases}$$

且对任意实数 a 有

$$E[x \mid \chi_E(x) > a] = \begin{cases} \varnothing, & a \geqslant 1 \\ E, & 0 \leqslant a < 1 \\ [a,b], & a < 0 \end{cases}$$

所以 $\chi_E(x)$ 是有界可测函数，从而 $\chi_E(x)$ 有界可积，于是

$$\int_a^b \chi_E(x)\mathrm{d}x = \int_E \chi_E(x)\mathrm{d}x + \int_{[a,b]-E} \chi_E(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_E 1\mathrm{d}x + \int_{[a,b]-E} 0\mathrm{d}x$$
$$= mE + 0 = mE.$$

[5.12] 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \text{ 为无理数} \\ x^3. & x \text{ 为有理数} \end{cases}$$

试计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

解 令 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. $x\in(0,1]$,则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上与 $g(x)$ 几乎处处相等,因而有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

由于 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在[0,1]上无界,而

$$\{g(x)\}_n = \left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \dfrac{1}{n^2} \leqslant x \leqslant 1 \\ n. & 0 < x < \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$$

故 $$\int_0^1 \left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}_n \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n^2}} n\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$= 2 - \frac{1}{n}$$

所以 $$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}_n \mathrm{d}x$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

[5.13] 设

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1] \\ \dfrac{1}{x^2}. & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

求 $$\int_{(0,+\infty)} f(x)\mathrm{d}x.$$

解 这是函数 $f(x)$ 为无界函数，同时集合为无限测度的情况.

对任何自然数 n，截断函数为：

$$\{f(x)\}_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant n \\ n, & \dfrac{1}{\sqrt{x}} > n \\ \dfrac{1}{x^2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

由 $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant n$ 得，$\dfrac{1}{n^2} \leqslant x \leqslant 1$；由 $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > n$ 得，$0 < x < \dfrac{1}{n^2}$；

故
$$\{f(x)\}_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \in \left[\dfrac{1}{n^2}, 1\right] \\ n, & x \in \left(0, \dfrac{1}{n^2}\right) \\ \dfrac{1}{x^2}, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

设 $E_n = (0, n]$，则 $E_n \subset E_{n+1}$，$\{f(x)\}_n$ 在 E_n 上是分段连续的有界函数，故 $\{f(x)\}_n$ 在 E_n 上黎曼可积，所以有

$$\begin{aligned} \int_{E_n} \{f(x)\}_n \mathrm{d}x &= \int_{(0,\frac{1}{n^2})} \{f(x)\}_n \mathrm{d}x + \int_{[\frac{1}{n^2},1]} \{f(x)\}_n \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{(1,n]} \{f(x)\}_n \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} n\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \int_1^n \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= 3 - \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

于是
$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \{f(x)\}_n \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{2}{n}\right) = 3.$$

[5.14] 设

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & x \text{ 为无理数} \\ 1. & x \text{ 为有理数}\end{cases}$$

$f(x)$在$[0,1]$上黎曼可积吗？勒贝格可积吗？若可积，则计算$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解 在$[0,1]$上$f(x)$不是(R)可积的，这是因为除了$x=1$外，$[0,1)$上的点全是$f(x)$的间断点，即它的间断点所成之集为一正测度集.

$f(x)$是(L)可积的，这是因为$f(x)$是有界可测的. 事实上，令$\varphi(x)=x^3, x\in[0,1]$，则在$[0,1]$上$f(x)$与$\varphi(x)$几乎处处相等，所以有

$$(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

[5.15] 设$f(x)$是E上的非负可测函数，又E中使$f(x)\geqslant c$的那些点所成之集A的测度$mA=a$，证明：

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant ac.$$

证 由于$A=E[x\,|\,f(x)\geqslant c]$，故

$$B=E-A=E[x\,|\,0\leqslant f(x)<c],$$

又由于$f(x)$非负可测，所以

$$\int_B f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \int_A f(x)\mathrm{d}x+\int_B f(x)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_A f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_A c\mathrm{d}x \\ &= c\cdot mA = c\cdot a.\end{aligned}$$

即

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant ac.$$

[5.16] 设$E_1, E_2, \cdots, E_n$是被$[0,1]$包含的几个可测点集，

如果任何 $x\in[0,1]$，都至少属于其中 q 个，则其中至少有一集合的测度不小于 $\frac{q}{n}$.

证 令 $\chi_{E_i}(x)$ 为集合 E_i 的特征函数：

$$\chi_{E_i}(x)=\begin{cases}1, & x\in E_i\\ 0, & x\in[0,1]-E_i\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

于是

$$\begin{aligned}&mE_1+mE_2+\cdots+mE_n\\ &=\int_0^1\chi_{E_1}(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\chi_{E_2}(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_0^1\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1[\chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)+\cdots+\chi_{E_n}(x)]\mathrm{d}x\\ &\geqslant\int_0^1 q\mathrm{d}x=q.\end{aligned}$$

令

$$mE_j=\max\{mE_1,mE_2,\cdots,mE_n\},$$

则

$$n\cdot mE_j\geqslant mE_1+mE_2+\cdots+mE_n\geqslant q,$$

从而

$$mE_j\geqslant\frac{q}{n}.$$

[5.17] 证明，$[a,b]$上非负连续函数 $f(x)$，如果 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，那么 $f(x)\equiv 0$.

证 若 $f(x)\equiv 0$ 不成立，则至少存在一点 $x_0\in[a,b]$及 $c>0$，使 $f(x_0)\geqslant c>0$，由连续函数的性质，必存在 $\delta>0$，使 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b]$，且对一切 $x\in[x_0-\delta,x+\delta)$ 有 $f(x)\geqslant c>0$，又由 $f(x)$的非负性，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\geqslant 2c\delta>0,$$

与题设矛盾.

所以 $$f(x)\equiv 0, x\in[a,b].$$

[5. 18]　设 $f(x), g(x)$ 在 E 上可积，那么函数 $\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 也在 E 上可积.

证　因 $f(x), g(x)$ 都可积，所以 $f(x), g(x)$ 可测，由此知 $\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 也在 E 上可测.

又
$$0 \leqslant \sqrt{f^2(x)+g^2(x)} \leqslant |f(x)|+|g(x)|,$$
而 $|f(x)|+|g(x)|$ 可积，所以 $\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 在 E 上也可积.

三、积分的性质推广

[5. 19]　设 $mE>0$，$f(x), g(x)$ 为 E 上的可积函数，且满足 $f(x)<g(x)$，试证：
$$\int_E f(x)\mathrm{d}x < \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

证　因
$$g(x)-f(x)>0$$
所以
$$\int_E g(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x \geqslant 0.$$
若
$$\int_E [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x = \int_E |g(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0,$$
则 $g(x)-f(x)=0$ $a.e$ 于 E，与 $f(x)<g(x)$ 矛盾.

所以
$$\int_E g(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x > 0$$
即
$$\int_E f(x)\mathrm{d}x < \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

[5. 20]　设 $f(x)$ 为 E 上可积函数，如果对任何有界可测函数 $\varphi(x)$ 都有
$$\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{1}$$
则 $f(x)=0$ $a.e$ 于 E.

证　由 $\varphi(x)$ 的任意性，不妨设
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in E[x|f(x) \neq 0] \\ 0. & x \in E[x|f(x) = 0] \end{cases}$$

则 $\varphi(x)$ 为 E 上的非负有界可测函数.
由(1)得

$$\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{E[x \mid f(x)\neq 0]} f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

而

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{E[x \mid f(x)\neq 0]} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E[x \mid f(x)=0]} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{E[x \mid f(x)\neq 0]} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

所以 $f(x)=0 \quad a.e$ 于 E.

[5.21] 设 $mE<\infty$, $f(x)$ 为 E 上的可积函数, $\{E_n\}$ 为单调增加的可测集列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n=E$,证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证 由积分的绝对连续性, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 当 $e\subseteq E$, 且 $me<\delta$ 时,有

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

又因 $mE_n \longrightarrow mE(n\longrightarrow\infty)$,所以对上述 δ, $\exists\ N$, 当 $n>N$ 时, $mE-mE_n<\delta$,由于 $\{E_n\}$ 单增,且有 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n=E$,故对任何自然数 n,有 $E_n\subset E$,从而

$$m(E-E_n)<\delta.$$

因此由(1)知

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x - \int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{E-E_n} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)dx = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

注 条件 $mE<+\infty$ 可略去.

[5.22] 设 $f(x)$ 在 E 上可积, $E_k\subset E(k=1,2,\cdots)$ 均为可测积,且 $\lim\limits_{k\to\infty}mE_k=mE<+\infty$,则有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证 因 $f(x)$ 在 E 上可积，由积分的绝对连续性知，对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，只要 $A\subseteq E$，$mA<\delta$，便有

$$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty} mE_k=mE<+\infty$.

故对 $\delta>0$，$\exists\ k_0$，使当 $k>k_0$ 时，$E_k\subset E$，且有

$$mE-mE_k=m(E-E_k)<\delta.$$

于是

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x-\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{E-E_k} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

即
$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

[**5.23**] 设 $f(x)$ 在 E 上可积，令

$$E_n=E[x\,|\,|f(x)|\geqslant n],$$

则
$$\lim_{n\to\infty} mE_n=0.$$

证：
$$M=\int_E |f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\int_{E[x\,|\,|f(x)|\geqslant n]}|f(x)|\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\int_{E_n} n\mathrm{d}x=n\cdot mE_n$$

即
$$mE_n\leqslant\frac{1}{n}\cdot M.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty} mE_n=\lim_{n\to\infty}\frac{M}{n}=0.$$

[**5.24**] 设 $f(x)$ 为 E 上可积函数，$mE<+\infty$，试证，对 $\forall\ \varepsilon>0$，

(1) 存在有界可测函数 $g(x)$，使

$$\int_E |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

(2) 存在全空间上的连续函数 $\varphi(x)$，使得

$$\int_E |f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

(3) 若 $E=[a,b]$，则存在 $[a,b]$ 上的多项式函数 $p(x)$，使

$$\int_E |f(x) - p(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

证 (1) 令 $A = E[x \mid f(x) = +\infty]$,

$$e_n = E[x \mid |f(x)| \geqslant n] \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则
$$e_1 \supset e_2 \supset e_3 \supset \cdots \supset e_n \supset \cdots$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} e_n = A, \text{且 } mA = \lim_{n \to \infty} m e_n.$$

由于 $f(x)$ 为 E 上的可积函数,$mE < +\infty$,故

$$f(x) < +\infty \ a.e. \text{ 于 } E.$$

所以 $mA = 0$,

即 $\lim\limits_{n \to \infty} m e_n = mA = 0$.(注 也可利用[5.23]的方法证明 $mA = 0$)

另外,$f(x)$ 为 E 上的可积函数,故 $|f(x)|$ 也为 E 上的可积函数,由积分的绝对连续性知,对 $\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists\ \delta > 0$,使当 $A \subset E$,$mA < \delta$ 时有

$$\int_A |f(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

由于 $\lim\limits_{n \to \infty} m e_n = 0$,故对上述的 δ,存在自然数 N,使 $m e_N < \delta$,从而

$$\int_{e_N} |f(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

作 E 上的可测函数

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E - e_N \\ 0. & x \in e_N \end{cases}$$

由于 $x \in E - e_N$ 时,$|f(x)| < N$,故 $|g(x)| \leqslant N$,即 $g(x)$ 为 E 上的有界可测函数,从而

$$\begin{aligned} \int_E |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x &= \int_{E - e_N} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{e_N} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \\ &= \int_{e_N} |f(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon. \end{aligned}$$

即 $g(x)$ 为满足条件的可测函数.

(2) $f(x)$在 E 上可积，则由(1)知，对$\forall\ \varepsilon>0$，存在有界可测函数 $g(x)$，设$|g(x)|\leqslant k$，使

$$\int_E |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $g(x)$为 E 上有界可测函数，则由鲁金定理知，对上述的 $\varepsilon>0$，有闭集 $F\subset E$ 存在，和全空间上的连续函数 $\varphi(x)$使

(i) 在 F 上 $g(x)=\varphi(x)$；

(ii) $m(E-F)<\frac{\varepsilon}{4k}$；

(iii) $|\varphi(x)|\leqslant k$.(不然的话取如下函数代替 $\varphi(x)$)：

$$\{\varphi(x)\}_k=\begin{cases}\varphi(x), & |\varphi(x)|\leqslant k\\ k, & \varphi(x)>k\\ -k. & \varphi(x)<-k\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_E|g(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x&=\int_{E-F}|g(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\int_F|g(x)\\&\quad-\varphi(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{E-F}|g(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{E-F}|g(x)|+|\varphi(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant 2k\cdot m(E-F)<2k\cdot\frac{\varepsilon}{4k}=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_E|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x&\leqslant\int_E|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\int_E|g(x)-\\&\quad\varphi(x)|\mathrm{d}x\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\varphi(x)$是满足条件的全空间上的连续函数.

(3) 若 $E=[a,b]$，由于 $f(x)$在 E 上可积，由(2)知，对$\forall\ \varepsilon>0$，存在$[a,b]$上的连续函数 $\varphi(x)$，使

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再由维尔斯特拉斯定理知，对任一$[a,b]$上的连续函数$\varphi(x)$及$\forall\ \varepsilon>0$，存在多项式$p(x)$，使得对一切$x\in[a,b]$成立如下不等式：

$$|p(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_a^b|p(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\ \leqslant&\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|\varphi(x)-p(x)|\mathrm{d}x\\ <&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

即$P(x)$是满足条件的多项式函数.

［**5.25**］ 若$f(x)$在E上可积，则

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot mE[x\,|\,|f(x)|\geqslant n]=0.$$

证 令$E_k=E[x\,|\,k-1\leqslant|f(x)|<k]$，则$E=\sum\limits_{k=1}^{\infty}E_k$.

且 $$E_i\cap E_j=\varnothing\quad(i\neq j)$$

由于$f(x)$可积，所以$|f(x)|$在E上也可积，由积分的完全可加性有

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty,$$

故级数收敛，从而存在自然数n. 当$k>n$时有

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x\longrightarrow 0\quad(n\longrightarrow\infty),$$

而当$x\in E_k$时，$(k-1)\leqslant|f(x)|<k\quad(k=1,2,\cdots)$，故有

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x&\geqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-1)\cdot mE_k\geqslant n\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}mE_k\\&=n\cdot mE[x\,|\,|f(x)|\geqslant n],\end{aligned}$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}n\cdot mE[x\,|\,|f(x)|\geqslant n]=0.$$

［**5.26**］ 设$mE<+\infty$，$f(x)$是E上有限可测函数，

$$E_n=E[x\,|\,n-1\leqslant f(x)<n].$$

证明，$f(x)$在 E 上可积的充要条件是：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |n| \cdot mE_n < +\infty.$$

证 因 $f(x)$为 E 上有限可测函数，故 $E_n = E[x \mid n-1 \leqslant f(x) < n]$为可测集，且 $E = \sum_{-\infty}^{+\infty} E_n$. 由于 $E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$，故

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} mE_n = mE < +\infty.$$

在 E_n 上，$n-1 \leqslant f(x) < n$，由于

(i) 当 $n \geqslant 1$ 时，有 $n-1 \leqslant f(x) < n \Longrightarrow n-1 \leqslant |f(x)| < n$，

(ii) 当 $n < 0$ 时，有 $n-1 \leqslant f(x) < n \Longrightarrow |n-1| \geqslant |f(x)| > |n|$，总之，对一切 n，在 E_n 上有 $|n|-1 \leqslant |f(x)| < |n|+1$

由于 $|f(x)|$在 E_n 上非负可测，故有积分值，且有如下关系式：

$$(|n|-1)mE_n \leqslant \int_{E_n} |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant (|n|+1)mE_n$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

由积分的完全可加性知

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |n| \cdot mE_n - \sum_{-\infty}^{+\infty} mE_n \leqslant \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{E_n} |f(x)| \mathrm{d}x$$
$$\leqslant \sum_{-\infty}^{+\infty} |n| \cdot mE_n + \sum_{-\infty}^{+\infty} mE_n.$$

即

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |n| \cdot mE_n - mE \leqslant \int_E |f(x)| \mathrm{d}x$$
$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| \cdot mE_n + mE. \tag{1}$$

由此不等式，并注意到 $mE < +\infty$，则有

必要性 若 $f(x)$可积，则$|f(x)|$可积，由(1)的左端不等式有

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|n|\cdot mE_n\leqslant\int_E|f(x)|\mathrm{d}x+mE<+\infty.$$

即
$$\sum_{-\infty}^{+\infty}|n|\cdot mE_n<+\infty.$$

充分性 若 $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}|n|\cdot mE_n<+\infty$，由不等式(1)的右端不等式有

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{-\infty}^{+\infty}|n|\cdot mE_n+mE<+\infty.$$

即 $|f(x)|$ 可积，从而 $f(x)$ 可积.

[5.27] 设 $mE<+\infty$，则 $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}mE[x\,|\,|f(x)|\geqslant n]$ 收敛.

当 $mE=\infty$ 时，结论是否成立？

证 设 $E_n=E[x\,|\,n\leqslant|f(x)|<n+1]$，则 $E=\sum\limits_{n=0}^{\infty}E_n$，且 $E_i\cap E_j=\varnothing\,(i\neq j)$. $E[x\,|\,|f(x)|\geqslant k]=\sum\limits_{k=n}^{\infty}E_k$

故
$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x.$$

由于

$$n\cdot mE_n\leqslant\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant(n+1)\cdot mE_n \tag{1}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n\leqslant\int_E|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot mE_n,$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=n}^{\infty}mE_k\Big)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}mE[x\,|\,|f(x)|\geqslant n]\end{aligned} \tag{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot mE_n=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot mE_n+\sum_{n=0}^{\infty}mE_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}mE[x\mid |f(x)|\geqslant n]+mE \qquad (3)$$

由(1),(2),(3)式知

$$\sum_{n=1}^{\infty}mE[x\mid |f(x)|\geqslant n]\leqslant\int_E|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}mE[x\mid |f(x)|\geqslant n]+mE$$

注意到 $mE<+\infty$,由上式即知

$$\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}mE[x\mid |f(x)|\geqslant n]<+\infty.$$

从而

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x<+\infty\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}mE[x\mid |f(x)|\geqslant n]<+\infty.$$

即 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 可积的充要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}mE[x\mid |f(x)|\geqslant n]$收敛.

但是,若 $mE=+\infty$,充分性不成立.

例如,设

$$f(x)=\frac{1}{x},E=[1,+\infty)$$

则

$$E[x\mid |f(x)|\geqslant 1]=\{1\},E[x\mid |f(x)|\geqslant 2]=\varnothing,$$
$$E[x\mid |f(x)|\geqslant n]=\varnothing \quad (n\geqslant 2),$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}mE[x\mid |f(x)|\geqslant n]=0,$$

但 $f(x)$在$[1,+\infty)$上不可积.

[5.28] 设 $mE<+\infty$,$f(x)$在 E 上可积,令

$$E_k^{(n)}=E\left[x\mid \frac{k}{n}\leqslant f(x)\leqslant\frac{k+1}{n}\right],$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k}{n}\cdot mE_k^{(n)}=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证 由题设知 $E=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}E_k^{(n)}$，由于 $x\in E_k^{(n)}$ 时有 $\frac{k}{n}\leqslant f(x)\leqslant\frac{k+1}{n}$ 知

$$\frac{k}{n}mE_k^{(n)}\leqslant\int_{E_k^{(n)}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{k+1}{n}mE_k^{(n)},$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

因此

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k}{n}mE_k^{(n)}\leqslant\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{E_k}(n)f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k+1}{n}mE_k^{(n)}.$$

又

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{E_k^{(n)}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}E_k^{(n)}}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

故有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{n}mE_k^{(n)}\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k+1}{n}mE_k^{(n)}.$$

因此不等式知

$$\begin{aligned}0&\leqslant\lim_{n\to\infty}\left[\int_E f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{n}mE_k^{(n)}\right]\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k+1}{n}mE_k^{(n)}-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k}{n}mE_k^{(n)}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n}mE_k^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}mE_k^{(n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot mE=0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k}{n}mE_k^{(n)}=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

注 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k+1}{n}mE_k^{(n)}=\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 也成立.

[5.29] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，试证 $f(x)$ 的积分具有绝对连续性（即把积分的绝对连续性推广到 $mE=\infty$ 的情形）.

证法一 取 $\Delta_n=(-n,n)$，$n=1,2,\cdots$

由于当 $f(x)$ 可积时，$|f(x)|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上也可积，故极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}|f(x)|\mathrm{d}x$$

存在有限，于是对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists$ 自然数 N，使

$$\int_{-\infty}^{-N}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3},\int_{N}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}$$

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，故在 $(-N,+N)$ 上也可积，由有限区间上的积分绝对连续性知，对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得只要 $e'\subset(-N,N)$，$me'<\delta$ 时，就有

$$\left|\int_{e'}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现设 $e\subset(-\infty,+\infty)$，且 $me<\delta$ 为任一子集，那么

$$\begin{aligned}&\left|\int_{e}f(x)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\left|\int_{e\cap(-\infty,-N)}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{e\cap(N,+\infty)}f(x)\mathrm{d}x\right|\\ &+\left|\int_{e\cap(-N,N)}f(x)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&\int_{-\infty}^{-N}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{N}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x+\left|\int_{e}f(x)\mathrm{d}x\right|\\ <&\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的积分绝对连续性在 $(-\infty,+\infty)$ 上成立.

证法二 因 $f(x)$ 在 E 上可积，$E=(-\infty,+\infty)$，则 $|f(x)|$ 也在 E 上可积.

设 $\{E_k\}$ 为 E 的任一单调、测度有限的复盖，即

$$E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k,\quad E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots,$$

且 $mE_k<+\infty$，则

$$\int_{E}|f(x)|\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty.$$

于是，对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ k_0$ 使

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x - \int_{E_{k_0}} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{E-E_{k_0}} |f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon/2.$$

由于 $mE_{k_0}<+\infty$，$|f(x)|$ 又在 E_{k_0} 上可积，于是由测度有限的积分绝对连续性知，对上述的 $\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使当 $A\subset E_{k_0}$，只要 $mA<\delta$，就有

$$\int_A |f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，对$\forall\ A\subset E$，只要 $mA<\delta$，并注意到

$$A = (A\cap E_{k_0}) + (A\cap(E-E_{k_0})),$$

就有

$$\begin{aligned}\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_A |f(x)|\mathrm{d}x \\ &= \int_{A\cap E_{k_0}} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{A\cap(E-E_{k_0})} |f(x)|\mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_{E-E_{k_0}} |f(x)|\mathrm{d}x \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 的积分对 $mE=+\infty$ 也具有绝对连续性.

[5.30] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，$f(0)=0$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有导数，证明如下积分存在：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

证 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数为 A，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = A,$$

由局部有界定理知，存在 $\delta>0$，当 $|x|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant A+1.$$

令 $E_\delta=(-\delta,\delta)$，则常数函数 $A+1$ 在 E_δ 上是可积的，且$\dfrac{f(x)}{x}$为

可测函数，故$\frac{f(x)}{x}$在 E_δ 上可积.

而在$(-\infty,+\infty)-E_\delta$ 上有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{|f(x)|}{\delta},$$

另外，由于 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可积，故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)-E_\delta$上可积，所以，$\frac{|f(x)|}{\delta}$在$(-\infty,+\infty)-E_\delta$ 上可积，从而$\frac{f(x)}{x}$在$(-\infty,+\infty)-E_\delta$ 上也是可积的，于是，$\frac{f(x)}{x}$在 $E_\delta\cup[(-\infty,+\infty)-E_\delta]=(-\infty,+\infty)$上可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

存在.

[5.31] 设 $f(x)$是 E 上的有界可测函数，问是否对$\forall\ \varepsilon>0$，恒$\exists\ \delta>0$，使当分划 D 满足条件：

$$\max\{mE_1,mE_2,\cdots,mE_n\}<\delta$$

时有 $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x - S(D,f)\right|<\varepsilon$? 有(即问黎曼积分理论中的达布定理现在是否成立?)

解 (R)积分理论中的达布定理在(L)积分理论中一般不成立.

例如，狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in E_1=\{[0,1]\text{中的有理数}\\ 0. & x\in E_2=\{[0,1]\text{中的无理数}\end{cases}$$

因 $mE_1=0$，所以 $D(x)=0\quad a.e$ 于$[0,1]$，则

$$(L)\int_0^1 D(x)\mathrm{d}x=0.$$

即

$$\int_E D(x)\mathrm{d}x=0.$$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对$\forall\ \delta>0$，总存在分划 D，例如 n 等分$[0,1]$区间，

只要 n 充分大，就可使 $\frac{1}{n}<\delta$，而每个小区间上有有理点，所以

$$B_i = \sup_{x\in E_i}\{D(x)\} = 1.$$

故

$$S(D,D(x)) = \sum_{i=1}^{n} B_i \cdot mE_i = 1.$$

从而 $\left|\int_E D(x)\mathrm{d}x - S(D,D(x))\right| = |0-1| > \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$

此例说明，达布定理在(L)积分理论中不能总成立.

[5.32] 设在可测集 E 上给定函数 $f(x)$，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，恒有两个可积函数 $g(x)$ 与 $h(x)$，使

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \text{且} \int_E [h(x) - g(x)]\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$

则 $f(x)$ 也是 E 上的可积函数.（勒贝格可积的夹逼定理）

证 由题设知，取 $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$ $(n=1,2,\cdots)$，则恒有可积函数 $g_n(x)$ 与 $h_n(x)$，使

$$g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant h_n(x),$$

且 $$\int_E [h_n(x) - g_n(x)]\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

于是 $\{h_n(x) - g_n(x)\}$ 为非负可积函数列，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [h_n(x) - g_n(x)]\mathrm{d}x = 0.$$

对 $\forall\ \sigma>0$，令

$$E_n = E[x \mid |h_n(x) - g_n(x)| \geqslant \sigma],$$

则 $E_n \subset E$，故有

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty}\int_E [h_n(x) - g_n(x)]\mathrm{d}x \\ &\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} [h_n(x) - g_n(x)]\mathrm{d}x \\ &\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} \sigma\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sigma \cdot mE_n. \end{aligned}$$

从而对 $\forall\ \sigma>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} mE_n = \lim_{n\to\infty} mE[x \mid |h_n(x) - g_n(x)| \geqslant \sigma] = 0,$$

故
$$h_n(x) - g_n(x) \Rightarrow 0.$$

由黎斯定理知，存在子列 $\{h_{n_k}(x) - g_{n_k}(x)\}$，

使
$$h_{n_k}(x) - g_{n_k}(x) \to 0 \quad (k\to\infty) \quad a.e. \text{ 于 } E.$$

由于
$$g_{n_k}(x) \leqslant f(x) \leqslant h_{n_k}(x) \quad (k = 1,2,\cdots),$$

所以
$$|h_{n_k}(x) - f(x)| \leqslant h_{n_k}(x) - g_{n_k}(x) \to 0$$
$$(k\to+\infty).$$

即
$$\lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x) = f(x) \quad a.e \text{ 于 } E.$$

由于 $\{h_{n_k}(x)\}$ 为可测函数列，从而 $f(x)$ 为 E 上的可测函数，且
$$|f(x)| \leqslant \max\{|h_n(x)|, |g_n(x)|\}$$
$$\leqslant |h_n(x)| + |g_n(x)| = G_n(x)$$
由 $G_n(x) = |h_n(x)| + |g_n(x)|$ 的可积性知，$|f(x)|$ 为 E 上的可积函数，从而 $f(x)$ 为 E 上的可积函数.

[5.33] 设可积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒大于 0，又 $0<q<b-a$，证明
$$\inf_{me\geqslant q}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\} > 0.$$

证法一 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒大于 0，则
$$\lim_{n\to\infty} mE\left[x \mid f(x) \leqslant \frac{1}{n}\right] = mE[x \mid f(x) \leqslant 0] = 0,$$

故存在充分大的 N，使得
$$mE\left[x \,\middle|\, f(x) \leqslant \frac{1}{N}\right] < \frac{q}{2},$$

于是，对任何 e，$me \geqslant q$，总有
$$\int_e f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{e-E\left[x \,\middle|\, f(x)\leqslant \frac{1}{N}\right]} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_{e-E\left[x \middle| f(x)\leqslant\frac{1}{N}\right]} \frac{1}{N}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{N}\cdot m\left\{e - E\left[x \middle| f(x) \leqslant \frac{1}{N}\right]\right\}$$

$$\geqslant \frac{1}{N}\cdot\left\{me - mE\left[x \middle| f(x) \leqslant \frac{1}{N}\right]\right\}$$

$$\geqslant \frac{1}{N}\cdot\left[q - \frac{q}{2}\right] = \frac{1}{N}\cdot\frac{q}{2} > 0.$$

所以

$$\inf_{me\geqslant q}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\} \geqslant \frac{q}{2}\cdot\frac{1}{N} > 0.$$

证法二 因 $f(x)>0$，故

$$\inf_{me\geqslant q}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\} \geqslant 0.$$

下面用反证法证 $\inf\limits_{me\geqslant q}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\}>0$.

若 $\inf\limits_{me\geqslant q}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\}=0$，则对于任一正整数 k，存在 e_k，使 $me_k\geqslant q$，且使

$$\int_{e_k} f(x)\mathrm{d}x < \frac{1}{2^k}.$$

令

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=n}^{\infty} e_k\right],$$

由 $me_k\geqslant q$ 知

$$mQ = \lim_{n\to\infty}\left(m\sum_{k=n}^{\infty} e_k\right) \geqslant q > 0.$$

又对任何正整数 n，有

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\sum\limits_{k=n}^{\infty} e_k} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\int_{e_k} f(x)\mathrm{d}x$$

$$< \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

令 $n\to\infty$，即得

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

而 $mQ>0$，故知 $f(x)=0\quad a.e$ 于 Q.

此与题设 $f(x)>0$ 矛盾，所以有

$$\inf_{me\geqslant q}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\}>0.$$

证法三 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处有限. 由鲁金定理和可测集的性质，存在闭集 $F\subset[a,b]$，使 $m([a,b]-F)<\frac{q}{2}$，且 $f(x)$ 在 F 上连续，从而存在 $x_0\in F$，使 $f(x_0)=\inf\limits_{x\in F}f(x)$，由 $f(x)>0$ 知，$f(x_0)>0$，即有

$$f(x)\geqslant f(x_0)>0\quad(x\in F).$$

故对任何 e，$me\geqslant q$，由

$$\begin{aligned}e\cap F&=e\cap([a,b]-\mathscr{C}_{[a,b]}F)\\&=e-(e\cap\mathscr{C}_{[a,b]}F),\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}m(e\cap F)&=me-m(e\cap\mathscr{C}_{[a,b]}F)\\&\geqslant me-m(\mathscr{C}_{[a,b]}F)\\&\geqslant q-\frac{q}{2}=\frac{q}{2}.\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}\int_e f(x)\mathrm{d}x&\geqslant\int_{e\cap F}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{e\cap F}f(x_0)\mathrm{d}x\\&\geqslant f(x_0)\cdot m(e\cap F)\geqslant\frac{q}{2}\cdot f(x_0)>0\end{aligned}$$

从而有

$$\inf_{me\geqslant q}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\}\geqslant\frac{q}{2}\cdot f(x_0)>0.$$

[5.34] 设 $f(x)>0$ 在 $[a,b]$ 上可测，则关系式

$$\int_a^b[f(x)]_{2n}\mathrm{d}x-\int_a^b[f(x)]_n\mathrm{d}x\to 0(n\to\infty)\qquad(1)$$

与

$$n \cdot mE[x \mid f(x) > n] \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{2}$$

是等价的.

证 设关系式(2)成立,又设 $A_n = E[x \mid f(x) > n]$,注意到

$$[f(x)]_{2n} = \begin{cases} f(x), & f(x) \leqslant 2n \\ 2n. & f(x) > 2n \end{cases}$$

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & f(x) \leqslant n \\ n & f(x) > n \end{cases}$$

从而 $[f(x)]_n \leqslant [f(x)]_{2n}$,故有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_a^b [f(x)]_{2n} \mathrm{d}x - \int_a^b [f(x)]_n \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b ([f(x)]_{2n} - [f(x)]_n) \mathrm{d}x \\ &= \int_{A_n} ([f(x)]_{2n} - [f(x)]_n) \mathrm{d}x + \int_{[a,b]-A_n} ([f(x)]_{2n} \\ &\quad - [f(x)]_n) \mathrm{d}x \\ &= \int_{A_n} ([f(x)]_{2n} - [f(x)]_n) \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{A_n} (2n - n) \mathrm{d}x = n \cdot mA_n, \end{aligned}$$

由于(2)成立,即

$$n \cdot mE[x \mid f(x) > n] \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故

$$\int_a^b [f(x)]_{2n} \mathrm{d}x - \int_a^b [f(x)]_n \mathrm{d}x \to 0 \quad (n \to \infty).$$

即关系式(1)成立.

反之,如果关系式(1)成立,由于

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant n \cdot mA_{2n} = \int_{A_{2n}} n \mathrm{d}x \\ &= \int_{A_{2n}} ([f(x)]_{2n} - [f(x)]_n) \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^b ([f(x)]_{2n} - [f(x)]_n) \mathrm{d}x \to 0 \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

所以,

$$2n \cdot mA_{2n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

即当 A 的下标为偶数时(2)式成立，下证下标为奇数时(2)式成立.

因 $A_n \supset A_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，即$\{A_n\}$为递降集列. 由测度的单调性有

$$mA_{2n+1} \leqslant mA_{2n}$$

因此

$$(2n+1) \cdot mA_{2n+1} \leqslant \frac{2n+1}{2n} \cdot 2n \cdot mA_{2n},$$

由于 $2n \cdot mA_{2n} \to 0(n \to \infty)$，故

$$(2n+1) \cdot mA_{2n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

即当下标为奇数时(2)式成立.

综上知，对自然数 n，(2)式成立.

[5.35] 设在$[a,b]$上，$f(x)>0$ 与 $g(x)>0$ 均可测，如果存在有限极限：

$$\lim_{n \to \infty}\int_a^b \{[f(x)]_n - [g(x)]_n\}\mathrm{d}x = A,$$

又 $n \cdot mE[x|f(x)>n] \to 0 \quad (n \to \infty)$，则

$$n \cdot mE[x|g(x)>n] \to 0 \quad (n \to \infty).$$

证 因 $\lim\limits_{n \to \infty}\int_a^b ([f(x)]_n - [g(x)]_n)\mathrm{d}x = A,$

故 $\lim\limits_{n \to \infty}\int_a^b ([f(x)]_{2n} - [g(x)]_{2n})\mathrm{d}x = A,$

因此

$$\lim_{n \to \infty}\int_a^b ([g(x)]_{2n} - [g(x)]_n)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n \to \infty}\int_a^b ([g(x)]_{2n} - [f(x)]_{2n})\mathrm{d}x + \lim_{n \to \infty}\int_a^b ([f(x)]_{2n} - [f(x)]_n)\mathrm{d}x$$

$$+ \lim_{n \to \infty}\int_a^b ([f(x)]_n - [g(x)]_n)\mathrm{d}x$$

$$= -A + \lim_{n \to \infty}\int_a^b ([f(x)]_{2n} - [f(x)]_n)\mathrm{d}x + A$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_a^b([f(x)]_{2n} - [f(x)]_n)\mathrm{d}x \tag{*}$$

依题意有

$$n \cdot mE[x|f(x) > n] \to 0 \quad (n \to \infty),$$

则由上题结果有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b([f(x)]_{2n} - [f(x)]_n)\mathrm{d}x = 0.$$

从而由(*)式知

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b([g(x)]_{2n} - [g(x)]_n)\mathrm{d}x = 0.$$

又由上题结果有

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot mE[x|g(x) > n] = 0.$$

[5.36] 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$上可积,并且一致连续,那么 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. 举例说明"一致连续"条件不可去掉.

证 (用反证法)

若$\lim_{x\to\infty}f(x)\neq 0$,由极限的反命题知,存在 $\varepsilon_0>0$ 及点列$\{x_n\}$,不妨设

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots, x_n \to +\infty(n \to \infty)$$

对任意的自然数 N,当 $x_n, x_m > N$ 时,就有

$$|f(x_n)| > \varepsilon_0.$$

故取 $N=1$,当 $x_n - x_{n-1} > 1$ 时,应有$|f(x_n)|>\varepsilon_0$. 因 $f(x)$在$(0,+\infty)$上一致连续,所以对上面的 ε_0,存在 $\delta>0$(不妨设 $\delta<\frac{1}{2}$),当 $x,x'\in(0,+\infty)$,且$|x-x'|<\delta$ 时,$|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon_0}{2}$,特别,对每个 x_n,当$|x-x_n|<\delta$ 时,有

$$||f(x)| - |f(x_n)|| \leqslant |f(x) - f(x_n)| < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

即 $$|f(x)| > |f(x_n)| - \frac{\varepsilon_0}{2} > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

记 $$E_n = (x_n - \delta, x_n + \delta),$$

由于　$\delta<\frac{1}{2}, x_{n+1}-x_n>1$，所以 $E_n\cap E_{n+1}=\varnothing$

并且
$$\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x>\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot 2\delta=\varepsilon_0\delta,$$

于是
$$\int_0^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_0\delta=\infty.$$

此与 $f(x)$ 的可积性矛盾. 所以必有
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

下面举例说明一致连续的条件不可少.

例如，取 $\delta_n=\frac{1}{2^n}$，作如下函数 $f(x)$：

当 $x=n$ 时，$f(x)=n, f(n-\delta_n)=f(n+\delta_n)=0$；

在 $(n-\delta_n, n)$ 及 $(n, n+\delta_n)$ 上，$f(x)$ 为线性函数；

在 $(0,\frac{1}{2})$ 及 $(n+\delta_n, (n+1)-\delta_{n+1})$ 上 $f(x)=0$.

$f(x)$ 的图形如图 5－1 所示。

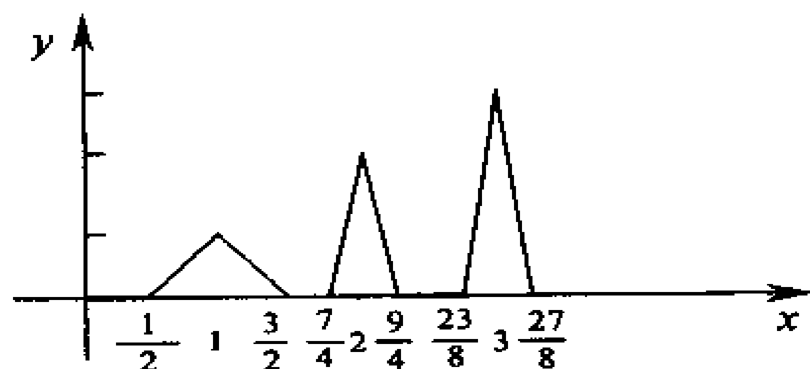


图 5－1

显然 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且
$$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-\delta_n}^{n+\delta_n}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n\cdot n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，所以

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

即 $f(x)$在$(0,+\infty)$上可积.

但显然

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0,$$

这是由于$f(x)$在$(0,+\infty)$上不是一致连续的.

[S.37] 设$f(x),g(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的可积函数，对一切区间(a,b)有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

证明：(1) 对每一个可测集E有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $f(x)$与$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上几乎处处相等.

证 (1) 由于$(-\infty,+\infty)$上的任何开集G都可表为

$$G = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k),$$

其中(α_k,β_k)是两两互不相交的邻区间，故由积分的可列可加性知

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x = \int_G g(x)\mathrm{d}x.$$

因单点集的测度为0，所以在任何闭区间$[a,b]$及任何半开半闭区间$(a,b]$，$[a,b)$上$f(x)$与$g(x)$的积分也相等，而

$$(-\infty,+\infty) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[n-1,n),$$

又诸$[n-1,n)$为互不相交的区间，由积分的可列可加性有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x.$$

设F为$(-\infty,+\infty)$上的闭集，则$\mathscr{C}F$为开集，由以上讨论有

$$\int_{\mathscr{C}F} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathscr{C}G} g(x)\mathrm{d}x.$$

从而

$$\int_F f(x)\mathrm{d}x = \int_{(-\infty,+\infty)-\mathscr{C}F} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x - \int_{\mathscr{C}F} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x - \int_{\mathscr{C}F} g(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_F g(x)\mathrm{d}x.$$

进而对 F_σ 型集 E，也有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

若 E 为任一可测集，则存在 F_σ 型集 H，使 $H\subset E$，且 $m(E-H)=0$，由于 $E-H$ 为零测集，所以在 $E-H$ 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积分相等，故有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_H f(x)\mathrm{d}x + \int_{E-H} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_H g(x)\mathrm{d}x + \int_{E-H} g(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 由于

$$\mathrm{R}^1[x\,|\,f(x)\neq g(x)] = \mathrm{R}^1[x\,|\,f(x)>g(x)] + \mathrm{R}^1[x\,|\,f(x)<g(x)]$$

记

$$E_1=\mathrm{R}^1[x\,|\,f(x)>g(x)]=\mathrm{R}^1[x\,|\,f(x)-g(x)>0],$$

$$E_2=\mathrm{R}^1[x\,|\,f(x)<g(x)]=\mathrm{R}^1[x\,|\,f(x)-g(x)<0],$$

则 E_1,E_2 可测，由(1)的证明知

$$\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1} g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_2} g(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_{E_1}[f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{E_2}[g(x) - f(x)]\mathrm{d}x = 0.$$

由于 $f(x)-g(x)$ 在 E_1 上大于零，$g(x)-f(x)$ 在 E_2 上大于零，

故只有 $$mE_1 = 0, mE_2 = 0.$$

从而

$$m\mathrm{R}^1[x \mid f(x) \neq g(x)] = 0,$$

即 $f(x)=g(x)$ $a.e$ 于 R^1.

[5.38] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，若对任何 $c(0<c<1)$，都有

$$\int_0^c f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则有 $f(x)=0$ $a.e$ 于 $[0,1]$.

证 用反证法

设在 $(0,1)$ 上 $f(x)$ 不是几乎处处为零的，令

$$E = (0,1), E_1 = E[x \mid f(x) > 0], E_2 = E[x \mid f(x) < 0],$$

则 mE_1 与 mE_2 中至少有一个大于零. 不妨设 $mE_1>0$，则存在闭集 $F\subset E_1\subset(0,1)$，满足 $mF>0$，从而 $\int_F f(x)\mathrm{d}x > 0$. 令

$$\alpha=\min_{x\in F}\{x\}, \quad \beta=\max_{x\in F}\{x\}$$

则有 $0<\alpha<\beta<1$

现取 $\gamma\in(\beta,1)$，并令

$$G = (0,\gamma) - F,$$

则 G 为开集. 由于对任何 $C\in(0,1)$，都有 $\int_0^c f(x)\mathrm{d}x=0$，于是有

$$\int_0^\gamma f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

故

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\gamma f(x)\mathrm{d}x - \int_F f(x)\mathrm{d}x$$
$$= 0 - \int_F f(x)\mathrm{d}x < 0. \qquad (*)$$

另外，设

$$G=\sum_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i),$$

其中(a_i,b_i)为互不相交的构成区间，则必存在某个$(a_k,b_k)\subset G$，且使$\int_{a_k}^{b_k}f(x)\mathrm{d}x<0$，(否则必有$\int_G f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$与(*)式矛盾)，但

$$\int_{a_k}^{b_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{b_k}f(x)\mathrm{d}x-\int_0^{a_k}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=0-0=0$$

此为矛盾.

所以　$f(x)=0$　a. e 于$[0,1]$.

[5. 39]　证明黎曼-勒贝格定理：若$f(x)$为$[a,b]$上的可积函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0.$$

证　(i) 先设$f(x)$为$[a,b]$上的连续函数，因$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，从而在$[a,b]$上一致连续，故对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，存在$[a,b]$的如下分划

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b,$$

使$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\{|x_k-x_{k-1}|\}<\delta$时，$f(x)$在每一个$[x_{k-1},x_k]$$(k=1,2,\cdots,m)$上，对任何$x',x''\in[x_{k-1},x_k]$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

于是

$$\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]\sin nx\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)\sin nx\mathrm{d}x\triangleq \mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

但

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]\sin nx\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-f(x_k)|\mathrm{d}x<\varepsilon\cdot(x_k-x_{k-1})$$

所以

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{I}| &= \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]\sin nx\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{m}\varepsilon(x_k-x_{k-1}) = \varepsilon\sum_{k=1}^{m}(x_k-x_{k-1}) \\
&= (b-a)\cdot\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{m}f(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{m}f(x_k)\frac{\cos(nx_{k-1})-\cos(nx_k)}{n}.
\end{aligned}
$$

故当 $n\to\infty$ 时

$$
\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)\sin nx\mathrm{d}x\to 0.
$$

所以,对上述 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,当 $n\geqslant N$ 时有

$$
|\mathrm{II}| = \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)\sin nx\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right| &\leqslant |\mathrm{I}| + |\mathrm{II}| \\
&< (b-a)\varepsilon + \varepsilon = (b-a+1)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

即

$$
\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0.
$$

(ii) 若 $f(x)$ 为可积函数,由鲁金定理,对 $\forall\ \varepsilon>0$,存在 $[a,b]$ 上的连续函数 $g(x)$,使

$$
\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.
$$

又由(i)知,对连续函数 $g(x)$ 有

$$
\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0.
$$

故对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\ N$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\left|\int_a^b g(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]\sin nx\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x+\left|\int_a^b g(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

同理可证
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0.$$

[5.40] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，而在 $[a,b]$ 之外为 0，令

$$\varphi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t,$$

证明

$$\int_a^b|\varphi(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

证 依题设，对任何正数 h，$f(x)$ 在 $[a-h,b+h]$ 上可积，从而 $|f(x)|$ 在 $[a-h,b+h]$ 上可积. 现设

$$F(x)=\int_{a-h}^{x}|f(t)|\mathrm{d}t,\ x\in[a-h,b+h]$$

则 $F(x)$ 在 $[a-h,b+h]$ 上是单调增加函数，并且注意在 $[a,b]$ 之外，$f(x)=0$，则

$$\begin{aligned}|F(x)|\leqslant F(b+h)&=\int_{a-h}^{b+h}|f(t)|\mathrm{d}t\\&=\int_{a-h}^{a}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t+\int_b^{b+h}|f(t)|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= 0 + \int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t + 0 = \int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t < +\infty,$$

即 $F(x)$在$[a-h,b+h]$上是有界的，从而是可积的. 再注意到

$$\int_{x-h}^{x+h} |f(t)| \mathrm{d}t = \int_{a-h}^{x+h} |f(t)| \mathrm{d}t - \int_{a-h}^{x-h} |f(t)| \mathrm{d}t$$
$$= F(x+h) - F(x-h),$$

则有

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\varphi(x)| \mathrm{d}x &= \int_a^b \left(\frac{1}{2h} \left| \int_{x-h}^{x+h} f(t) \mathrm{d}t \right| \right) \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{2h} \int_a^b \left(\int_{x-h}^{x+h} |f(t)| \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2h} \int_a^b [F(x+h) - F(x-h)] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2h} \left(\int_{a+h}^{b+h} F(t) \mathrm{d}t - \int_{a-h}^{b-h} F(t) \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2h} \left(\int_{b-h}^{b+h} F(t) \mathrm{d}t - \int_{a-h}^{a+h} F(t) \mathrm{d}t \right) \\
&\leqslant \frac{1}{2h} (F(b+h) \cdot 2h - F(a-h) \cdot 2h) \\
&= F(b+h) - F(a-h) \\
&= \int_{a-h}^{b+h} |f(t)| \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

[5.41] 设 $mE = +\infty$，若 $f(x)$，$g(x)$为 E 上的可积函数，则 $f(x)+g(x)$也是 E 上的可积函数，且

$$\int_E [f(x) + g(x)] \mathrm{d}x = \int_E f(x) \mathrm{d}x + \int_E g(x) \mathrm{d}x.$$

证 (i) 若 $f(x)$，$g(x)$为 E 上非负可积函数，则对 E 上任一单调、测度有限的复盖集列$\{E_k\}$，即

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots \subseteq E_k \subseteq \cdots$$

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k, \quad mE_k < +\infty,$$

有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

$$\int_E g(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} g(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

而在 E_k 上，由于 $mE_k < +\infty$，根据测度有限集上可积函数的性质知

$$\int_{E_k}[f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_k} g(x)\mathrm{d}x.$$

故

$$\begin{aligned}\int_E[f(x) + g(x)]\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty}\int_{E_k}[f(x) + g(x)]\mathrm{d}x \\ &= \lim_{k\to\infty}\left[\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_k} g(x)\mathrm{d}x\right] \\ &= \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x < +\infty.\end{aligned}$$

故 $f(x)+g(x)$ 在 E 上可积，且

$$\int_E[f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) 设 $f(x)$，$g(x)$ 为 E 上一般可积函数. 由于 $f^+(x)$，$f^-(x)$，$g^+(x)$，$g^-(x)$ 为 E 上非负可积函数，由(i)知，$f^+(x)+g^+(x)$ 和 $f^-(x)+g^-(x)$ 在 E 上可积，又因

$$[f(x)+g(x)]^+ \leqslant f^+(x)+g^+(x),$$
$$[f(x)+g(x)]^- \leqslant f^-(x)+g^-(x).$$

故 $[f(x)+g(x)]^+$ 和 $[f(x)+g(x)]^-$ 也非负可积，所以

$$f(x) + g(x) = [f(x) + g(x)]^+ - [f(x) + g(x)]^-$$

在 E 上也可积. 由于

$$\begin{aligned}f(x)+g(x) &= [f(x)+g(x)]^+ - [f(x)+g(x)]^- \\ &= [f^+(x) - f^-(x)] + [g^+(x) - g^-(x)],\end{aligned}$$

而 $[f(x)+g(x)]^+$，$[f(x)+g(x)]^-$，$f^+(x)$，$f^-(x)$，$g^+(x)$，$g^-(x)$ 都在 E 上可积，则它们都在 E 上几乎处处有限，从而可以移项得

$$[f(x)+g(x)]^+ + f^-(x) + g^-(x)$$

$$=[f(x)+g(x)]^-+f^+(x)+g^+(x).$$

由(i)知

$$\int_E[f(x)+g(x)]^+\,dx+\int_E f^-(x)dx+\int_E g^-(x)dx$$
$$=\int_E[f(x)+g(x)]^-\,dx+\int_E f^+(x)dx+\int_E g^+(x)dx.$$

所以

$$\int_E[f(x)+g(x)]^+\,dx-\int_E[f(x)+g(x)]^-\,dx$$
$$=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx+\int_E g^+(x)dx-\int_E g^-(x)dx,$$

即

$$\int_E[f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.$$

[5.42] 当 $mE=+\infty$ 时，证明以下定理：

若(1) $mE=+\infty$；

(2) $f(x)$ 在 E 上有积分值；

(3) $E=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$，$E_1,E_2,\cdots$ 是一串互不相交的可测集.

则

$$\int_E f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f(x)dx.$$

证 由于 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，且 $f(x)$ 在 E 上有积分值，所以

$$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx.$$

故不妨设 $f(x)\geqslant 0$，令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E_n\\ 0. & x\in E-E_n\end{cases}$$

则 $f_n(x)$ 是非负可测函数，

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x).$$

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x.$$

四、积分收敛定理及应用

[5.43] 设$\{f_n(x)\}$为非负函数列，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则必有 $f_n(x)\Rightarrow 0$，但 $f_n(x)$不一定几乎处处收敛于 0.

证 (i) 对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $\sigma>0$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则存在自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x < \sigma\cdot\varepsilon.$$

令

$$E_n = E[x\,|\,|f_n(x)|\geqslant\sigma],$$

则有 $E_n\subset E$，于是

$$\begin{aligned}\sigma\cdot mE_n &= \sigma\int_{E_n}\mathrm{d}x \\ &= \int_{E_n}\sigma\mathrm{d}x \leqslant \int_{E_n}|f_n(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x < \sigma\cdot\varepsilon\end{aligned}$$

即

$$mE_n < \varepsilon.$$

也即

$$mE[x\,|\,|f_n(x)|\geqslant\sigma] < \varepsilon.$$

从而

$$f_n(x)\Rightarrow 0.$$

(ii) 下面举例说明 $f_n(x)$不一定几乎处处收敛于 0.

例如，在$[0,1]$上定义如下函数

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases}1, & x\in\left[\dfrac{i-1}{k},\dfrac{i}{k}\right]\\ 0. & x\in[0,1]-\left[\dfrac{i-1}{k},\dfrac{i}{k}\right]\end{cases}$$

$$(i = 1,2,\cdots,k, k = 1,2,3,\cdots)$$

$f_i^{(k)}(x)$的图形如图 5—2 所示。

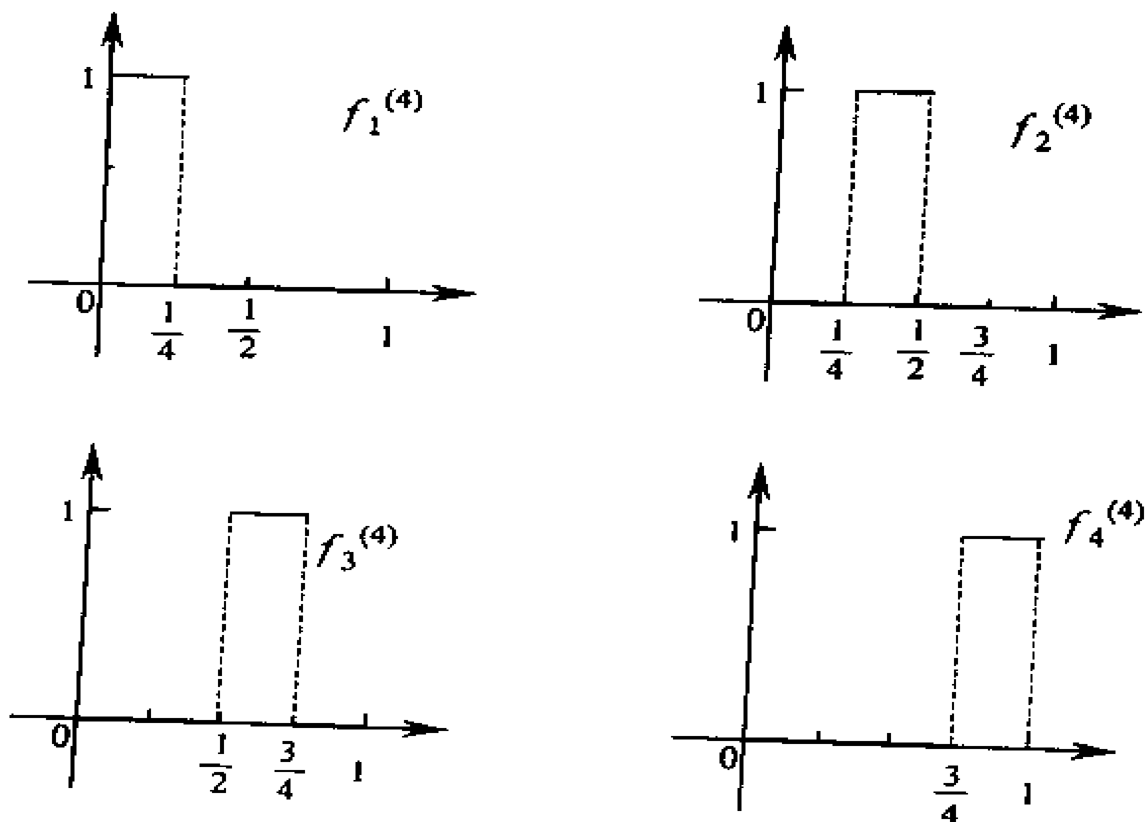


图 5—2

一般地，$f_i^{(k)}(x)$的意义是将[0,1]等分成 k 份，在第 i 个小区间上 $f_i^{(k)}(x)=1$，在[0,1]的其它处 $f_i^{(k)}(x)=0$. 令

$$\varphi_1(x)=f_1^{(1)}(x), \qquad \varphi_2(x)=f_1^{(2)}(x),$$

$$\varphi_3(x)=f_2^{(2)}(x), \qquad \varphi_4(x)=f_1^{(3)}(x),$$

$$\varphi_5(x)=f_2^{(3)}(x), \qquad \varphi_6(x)=f_3^{(3)}(x),$$

$$\varphi_7(x)=f_1^{(4)}(x), \qquad \varphi_8(x)=f_2^{(4)}(x),$$

…… ……

因 $\varphi_n(x)=f_i^{(k)}(x)$，所以当 $n\to\infty$时，必有 $k\to\infty$. 又由于

$$\int_k \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{k},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E \varphi_n(x)\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0.$$

但另一方面，对任何 $x_0\in[0,1]$ 与任何固定的 k，必可在 $f_i^{(k)}(x)(i=1,2,\cdots,k)$ 中选出一个 $f_{i_{k_0}}^{(k)}(x)$，使 $f_{i_{k_0}}^{(k)}(x_0)=1$，也就是说数列 $\left\{f_{i_{k_0}}^{(k)}(x_0)\right\}$ 为每一项都是 1 的常数列，它当然不收敛于 0，因此 $\{\varphi_n(x)\}$ 处处不收敛于 0.

[5.44] 设 $mE<+\infty$，$\{f_n(x)\}$ 为 E 上一列可测函数，证明

$$\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x \to 0 \quad (n\to\infty)$$

的充要条件是 $f_n(x)\Rightarrow 0$.

证法一 充分性. 若 $f_n\Rightarrow 0$，则有

$$\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\Rightarrow 0, \text{且 } 0\leqslant\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\leqslant 1.$$

由于常数函数 1 在 E 上可积，由勒贝格控制收敛定理即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\mathrm{d}x = \int_E 0\mathrm{d}x = 0.$$

必要性. 设

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\mathrm{d}x = 0,$$

由于 $\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\geqslant 0$，所以必有

$$\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\Rightarrow 0.$$

事实上，若不然，则 $\exists\ \varepsilon_0>0,\delta_0>0$ 及一列 $\{n_k\}$，使

$$mE\left[x\left|\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\geqslant\varepsilon_0\right.\right]>\delta_0$$

从而

$$\int_E \frac{|f_{n_k}|}{1+|f_{n_k}|}\mathrm{d}x \geqslant \int_{E\left[x\left|\frac{|f_{n_k}|}{1+|f_{n_k}|}\geqslant\varepsilon_0\right.\right]} \frac{|f_{n_k}|}{1+|f_{n_k}|}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \varepsilon_0 \cdot \delta_0.$$

此与$\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}dx \to 0$矛盾，故$\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \Rightarrow 0$.

从而$1-\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \Rightarrow 1$，即$\frac{1}{1+|f_n|} \Rightarrow 1$.

所以$1+|f_n| \Rightarrow 1$，即$|f_n| \Rightarrow 0$. 从而

$$f_n \Rightarrow 0.$$

证法二　必要性　令

$$f(x) = \frac{x}{1+x},$$

由于
$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0 \quad (x \neq -1)$$

故当$x \geqslant 0$时，$f(x)=\frac{x}{1+x}$为单增函数.

对$\forall\ \sigma > 0$，令

$$A_n(\sigma) = E[x \mid |f_n(x)| \geqslant \sigma].$$

$$B_n(\sigma) = E - A_n(\sigma) = E[x \mid |f_n(x)| < \sigma].$$

于是
$$\frac{\sigma}{1+\sigma} mA_n(\sigma) \leqslant \int_{A_n(\sigma)} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx$$
$$\leqslant \int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

故对$\forall\ \sigma > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n(\sigma) = 0$，即

$$f_n(x) \Rightarrow 0.$$

充分性　设$f_n(x) \Rightarrow 0$.

则对$\forall\ \sigma > 0$，有

$$mA_n(\sigma) = mE[x \mid |f_n(x)| \geqslant \sigma] \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以

$$\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx$$
$$= \int_{A_n(\sigma)} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx + \int_{B_n(\sigma)} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx$$

$$\leqslant \int_{A_n(\sigma)} 1\mathrm{d}x + \int_{B_n(\sigma)} \frac{\sigma}{1+\sigma}\mathrm{d}x$$

$$= mA_n(\sigma) + \frac{\sigma}{1+\sigma}mB_n(\sigma)$$

$$\leqslant mA_n(\sigma) + \frac{\sigma}{1+\sigma}mE.$$

所以

$$0 \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sigma}{1+\sigma}mE.$$

由 σ 的任意性有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x = 0.$$

[5.45] 证明级数形式的勒维引理：设 $\{u_n(x)\}$ 是 E 上一列非负可积函数，而且级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_E u_i(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

那么 $\sum_{i=1}^{\infty}u_i(x)$ 几乎处处收敛于一个可积函数 $f(x)$，并且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty}\int_E u_i(x)\mathrm{d}x.$$

证 把问题转化为非负可测函数的形式，验证满足可测函数列的勒维定理的条件，为此，令

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n}u_i(x).$$

由于 $u_i(x)$ 非负可积，故 $f_n(x)$ 非负可积，即 $\{f_n(x)\}$ 为非负可测函数列，且 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$.

另外

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E \left[\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_E u_i(x)\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots),$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_E u_i(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\int_E u_i(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

即积分序列 $\left\{\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\right\}$ 有上界.

故可测函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足勒维定理的全部条件，由勒维引理，$f_n(x)$ 几乎处处收敛于一个可积函数 $f(x)$，即 $\sum_{i=1}^{n}u_i(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$，且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_E u_i(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\int_E u_i(x)\mathrm{d}x.$$

[5.46] 勒维定理中去掉函数列的非负性条件，结论是否成立？

解 结论未必成立.

例如，在 $[-1,1]$ 上定义

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{n}, & x\neq 0, x\in[-1,1]\\ 0. & x=0 \quad (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in[-1,1], x\neq 0\\ 0. & x=0\end{cases}$$

则 $f(x)\neq 0$ $a.e$ 于 $[-1,1]$，且有

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x).$$

但
$$\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=+\infty.$$

故 $\int_{-1}^{1}f_n(x)\mathrm{d}x$ 不存在，同理，$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$ 也不存在.

因此勒维定理的结论不成立.

[5.47] 设 $f(x)\geqslant 0$ 为 E 上可测函数,令

$$\{f(x)\}_n=\begin{cases}f(x), & x\in E[x\,|\,f(x)\leqslant n]\\ 0. & x\in E[x\,|\,f(x)>n].\end{cases}$$

则当 $f(x)<+\infty$ $a.e$ 于 E 时,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\{f(x)\}_n\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $A=E[x\,|\,f(x)=\infty]$,则 $mA=0$,所以

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x=0.$$

又在 A 上 $\{f(x)\}_n\equiv 0$,所以

$$\int_A\{f(x)\}_n\mathrm{d}x=0.$$

故

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_A\{f(x)\}_n\mathrm{d}x=0.$$

在 $E-A$ 上,$\{f(x)\}_n\leqslant\{f(x)\}_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$,且

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x)\}_n=f(x),$$

由勒维定理有

$$\int_{E-A}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{E-A}\{f(x)\}_n\mathrm{d}x,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x&=\int_A f(x)\mathrm{d}x+\int_{E-A}f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\int_A\{f(x)\}_n\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_{E-A}\{f(x)\}_n\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\int_A\{f(x)\}_n\mathrm{d}x+\int_{E-A}\{f(x)\}_n\mathrm{d}x\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\int_E\{f(x)\}_n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E\{f(x)\}_n\mathrm{d}x.$$

[5.48] 证明当 $mE=+\infty$ 时,勒维渐升函数列的积分定理:

若

(i) $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 是 E 上一串非负可测函数；

(ii) $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant \cdots$；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$；

则
$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证 任取 E 的一个单调且测度有限的复盖：
$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \subset \cdots,$$
$$mE_k < +\infty, E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k.$$

因为
$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x),$$

所以
$$\int_{E_k} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x \quad (mE_k < +\infty).$$

让 $k \to +\infty$ 有
$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

若有某自然数 n_0，使
$$\int_E f_{n_0}(x)\mathrm{d}x = +\infty,$$

则由(1)，显然结论成立.

不妨设对所有自然数 n，$f_n(x)$ 在 E 上均可积，即
$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

因为对 $\forall\ k(k=1,2,\cdots)$，$mE_k < +\infty$，则由测度有限时的勒维定理有
$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_k} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

又由于 $f_n(x) \geqslant 0$，所以
$$\int_{E_k} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f_n(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{E_k} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x,$$

让 $k\to+\infty$ 有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

再由(1)知：

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x, \tag{3}$$

由(2),(3)有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

注 由于 $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots$，故有

$$\int_E f_1(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f_2(x)\mathrm{d}x \leqslant \cdots,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在，即取极限是合理的.

[5.49] 设 $mE=+\infty$，令 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数，

$$\{f(x)\}_n = \begin{cases} f(x), & f(x)\leqslant n \text{ 时} \\ n. & f(x)>n \text{ 时} \end{cases}$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \{f(x)\}_n\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证 (i) 显然 $\{f(x)\}_n$ 是 E 上的渐升函数列，即

$\{f(x)\}_1 \leqslant \{f(x)\}_2 \leqslant \{f(x)\}_3 \leqslant \cdots \leqslant \{f(x)\}_n \leqslant \cdots$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\{f(x)\}_n = f(x)$；

(iii) 因 $f(x)$ 为 E 上非负可测函数，则 $\{f(x)\}_n$ 也为 E 上非负可测函数，由测度为无限的勒维定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \{f(x)\}_n\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

[5.50]　设 $f(x)$是 E 上的可测函数，$f_n(x)$几乎处处收敛于 $f(x)$，且

$$\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x < k \quad (k \text{ 为常数}),$$

试证，$f(x)$是可积函数.

证　设 $E_0 = E[x|\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)]$，由

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in E_0)$$

得

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = |f(x)| \quad (x \in E_0).$$

由法都引理有

$$\int_{E_0} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{E_0} (\lim_{n\to\infty} |f_n(x)|)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_{E_0} |f_n(x)|\mathrm{d}x \leqslant k.$$

因为 $m(E-E_0)=0$，所以

$$\int_{E-E_0} |f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

因此有

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{E_0} |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant k < +\infty$$

即 $|f(x)|$ 在 E 上是可积的，从而 $f(x)$ 在 E 上是可积的.

[5.51]　举例说明法都引理中的不等号确能成立.

解　设 $E=(0,1)$，$f_n(x)=nx^{n-1}(n=1,2,\cdots)$，

则 $f_n(x)$是 E 上的非负可测函数，而

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E nx^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$= (R)\int_0^1 nx^{n-1}\mathrm{d}x = 1 \quad (n=1,2,\cdots),$$

所以　$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = 1.$$

另一方面，对任意 $x\in(0,1)$，由于

$$\lim_{n\to\infty} nx^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{x^{1-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-\ln x\cdot x^{1-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}}{-\ln x}=0$$

所以

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} nx^{n-1}=0.$$

从而

$$\int_E [\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)]\mathrm{d}x=0,$$

即有

$$\int_E [\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)]\mathrm{d}x<\underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

[5.52] 设 $f(x)$，$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$都在 E 上可积，$f_n(x)\longrightarrow f(x)$ $a.e$ 于 E，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_E |f(x)|\mathrm{d}x,$$

试证：在任意可测子集 $e\subset E$ 上，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_e |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证 由法都引理有

$$\int_e |f(x)|\mathrm{d}x=\int_e \lim_{n\to\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_e |f_n(x)|\mathrm{d}x \tag{1}$$

同理有

$$\int_{E-e} |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_{E-e} |f_n(x)|\mathrm{d}x,$$

运用性质，若$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$存在，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n. \tag{*}$$

于是有

$$\int_e |f(x)|\mathrm{d}x=\int_E |f(x)|\mathrm{d}x-\int_{E-e} |f(x)|\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\,\mathrm{d}x - \int_{E-e} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\,\mathrm{d}x - \varliminf_{n\to\infty}\int_{E-e} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{E-e} |f_n(x)\,\mathrm{d}x\right\} \\
&\quad - \varliminf_{n\to\infty}\int_{E-e} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\xlongequal{\text{由 * 式}}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{\varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}x + \varliminf_{n\to\infty}\int_{E-e} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x\right\} \\
&- \varliminf_{n\to\infty}\int_{E-e} |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

即

$$
\int_e |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{2}
$$

综合(1),(2)得

$$
\varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_e |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}x.
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}x &= \varlimsup_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \varliminf_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_e |f(x)|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

[5.53] 试从 $\frac{1}{1+x}=(1-x)+(x^2-x^3)+\cdots(0<x<1)$,推证:$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$.

证 令 $f(x)=\frac{1}{1+x}$,$f_1(x)=1-x$,$f_2(x)=x^2-x^3$,$\cdots$,

$$
f_n(x)=x^{2n-2}-x^{2n-1},\cdots
$$

则 $f(x)$,$f_n(x)$ 都是 $(0,1)$ 上的非负可测函数,而且 $f(x)=$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$，由勒贝格基本定理有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x,$$

即
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (x^{2n-2} - x^{2n-1})\mathrm{d}x.$$

由于

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (x^{2n-2} - x^{2n-1})\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right).$$

又由于级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 收敛，

所以有

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

即

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

[5.54] 设 $f_n(x)$ 是 E 上的一串非负可测函数，且

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \cdots \geqslant f_n(x) \geqslant \cdots$$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 在 E 上几乎处处成立，则当 $\{f_n(x)\}$ 中至少已知有一个可积时，有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证 由题设知，存在 n_0，使 $f_{n_0}(x)$ 是 E 上的可积函数，又由于

$$f_{n_0}(x) \geqslant f_{n_0+1}(x) \geqslant f_{n_0+2}(x) \geqslant \cdots \geqslant f_{n_0+k}(x) \geqslant \cdots \geqslant 0,$$

且
$$\int_E f_{n_0}(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \quad (n \geqslant n_0),$$

故当 $n \geqslant n_0$ 时，$f_n(x)$ 都是 E 上的可积函数，于是由勒贝格控制收敛定理有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

[5.55] 设 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的可积函数，

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{x+t}\mathrm{d}t \quad x \in (0,+\infty),$$

问 $g(x)$ 是否为连续函数？当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)$ 有无极限存在？如果有极限，试求出其极限值.

解 (i)先证 $g(x)$ 为连续函数. 令

$$F(x,t) = \frac{f(t)}{x+t} \quad (0<t<\infty, 0<x<\infty),$$

则 $F(x,t)$ 为可测函数，对任一 $a>0$ 有

$$|F(x,t)| \leqslant \left|\frac{f(t)}{x+a}\right| < \frac{|f(t)|}{a} \quad (0<t<\infty).$$

由于 $\frac{|f(t)|}{a}$ 在 $(0,+\infty)$ 上可积，故对任何 $x_0\in(0,+\infty)$，在 $(0,+\infty)$ 上任取点列 $\{x_n\}$，且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$，

1) $F(x_n,t)\longrightarrow F(x_0,t)(n\to\infty)$；

2) $\{F(x_n,t)\}$ 为可测函数列；

3) $|F(x_n,t)|<\frac{|f(t)|}{a}$.

故由勒贝格控制收敛定理有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g(x_n) &= \int_0^{+\infty}[\lim_{n\to\infty}F(x_n,t)]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{f(t)}{x_n+t}\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{x_0+t}\mathrm{d}t = g(x_0).\end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 在 x_0 处连续，由 x_0 的任意性知，$g(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数.

(ii) 再求 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 的值.

任取一列数 $\{k_n\}$

$$1<k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}k_n = +\infty.$$

记
$$f_n(t)=\frac{f(t)}{k_n+t},$$
由于 $f(t)$ 为可积函数，故在 $(0,+\infty)$ 上 $f(t)$ 几乎处处有界，从而在 $(0,+\infty)$ 上处处有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=0$，又 $|f_n(t)|\leqslant|f(t)|$，而 $|f(t)|$ 在 $(0,+\infty)$ 上可积，由勒贝格控制收敛定理有
$$\lim_{n\to\infty}g(k_n)=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{k_n+t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{f(t)}{k_n+t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}0\mathrm{d}t=0.$$
由 $\{k_n\}$ 的任意性知
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)\text{ 存在，且}\lim_{x\to+\infty}g(x)=0.$$

[5.56] 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots$ 是 E 上的可测函数列，且 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，$g(x)$ 是任意有界的可测函数，如果有可积函数 $\psi(x)$，适合 $|f_n(x)|\leqslant\psi(x)$，$x\in E$，$(n=1,2,\cdots)$，则
$$\lim_{n\to\infty}\int_E g(x)f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

证 若 $g(x)=0$，则等式
$$\lim_{n\to\infty}\int_E g(x)f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)f(x)\mathrm{d}x$$
显然成立，不妨设 $g(x)\neq0$，$|g(x)|\leqslant M$.

(i) 由于 $\{f_n(x)\}$ 为可测函数列，$g(x)$ 可测，故 $\{g(x)f_n(x)\}$ 为可测函数列.

(ii) 由 $|g(x)|\leqslant M$，$|f_n(x)|\leqslant\psi(x)$，故
$$|g(x)f_n(x)|\leqslant M\psi(x),$$
$\psi(x)$ 可积，从而 $M\psi(x)$ 也可积.

(iii) 对任意的 $\sigma>0$，由于
$$E[x\,|\,|g(x)f_n(x)-g(x)f(x)|\geqslant\sigma]$$
$$=E[x\,|\,|g(x)(f_n(x)-f(x))|\geqslant\sigma]$$
$$=E[x\,|\,|g(x)|\cdot|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]$$
$$=E\left[x\,|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{\sigma}{|g(x)|}\right]$$

$$\subset E\left[x \mid |f_n(x)-f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{M}\right],$$

故

$$mE[x \mid |g(x)f_n(x)-g(x)f(x)| \geqslant \sigma]$$

$$\leqslant mE\left[x \mid |f_n(x)-f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{M}\right].$$

由于 $$f_n(x) \Rightarrow f(x),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} mE\left[x \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{M}\right] = 0$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} mE[x \mid |g(x)f_n(x) - g(x)f(x)| \geqslant \sigma] = 0$$

即 $$g(x)f_n(x) \Rightarrow g(x)f(x).$$

即 $\{g(x)f_n(x)\}$ 满足勒贝格控制收敛定理的全部条件，由勒贝格控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g(x)f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

［5.57］ 不利用勒贝格有界收敛定理，直接证明推论：若 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的一串一致有界的可测函数列，$mE<+\infty$，且在 E 上有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ a.e \text{ 于 } E,$$

则 $f(x)$ 在 E 上可积，且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的一致有界函数列，即有常数 k，使对一切 $x\in E$ 和一切自然数 n 都有 $|f_n(x)|\leqslant k$，又

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ a.e \text{ 于 } E$$

所以 $$|f(x)| \leqslant k \ a.e \text{ 于 } E.$$

即存在 $A\subset E$，$mA=0$，而在 $E_1=E-A$ 上，$|f(x)|\leqslant k$. 故 $f(x)$ 为 E_1 上的有界可测函数，从而 $f(x)$ 为 E_1 上的有界可积函数.

又由于 $mA=0$，$f(x)$ 为 A 上的可积函数，所以，$f(x)$ 为 $E=$

$E_1 \cup A$ 上的可积函数. 故不妨设 $f(x)$ 在 E 上处处有 $|f(x)| \leqslant k$ 成立，从而由叶果诺夫定理知

对 $\forall\ \varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{4k}$，则存在可测子集 $e \subset E$，使 $me < \delta = \frac{\varepsilon}{4k}$，而在 $E - e$ 上，$f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

所以，对上面的 $\varepsilon > 0$，在 $E - e$ 上的一切 x，有 $N > 0$，使当 $n \geqslant N$ 时有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(1 + mE)}$$

成立，所以

$$\begin{aligned}
&\left| \int_E f_n(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x \right| \\
\leqslant &\int_E |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \\
= &\int_{E-e} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x + \int_e |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \\
\leqslant &\frac{\varepsilon}{2(1 + mE)} \cdot m(E - e) + 2kme \\
< &\frac{\varepsilon}{2(1 + mE)} \cdot mE + 2k \cdot \frac{\varepsilon}{4k} \\
< &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

[5. 58]　**证明 $mE = +\infty$ 时的勒贝格控制收敛定理：设 $mE = +\infty$，**

(1) $F(x)$ 在 E 上可积；

(2) $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 是 E 上一串可测函数；

(3) $|f_n(x)| \leqslant F(x), n = 1, 2, \cdots$；

(4) $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

则 $f(x)$ 在 E 上可积，且有

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证 因 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，由黎斯定理知，存在子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$，使

$$f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x) \ a.e. \text{ 于 } E.$$

由于 $|f_n(x)| \leqslant F(x) \ (n=1,2,\cdots)$，所以

$$|f(x)| \leqslant F(x) \ a.e. \text{ 于 } E.$$

而 $f_n(x), f(x)$ 可测，$F(x)$ 可积，由勒贝格控制收敛定理知，$f_n(x), f(x)$ 也可积.

设 $\{E_n\}$ 为 E 的任一单调、测度有限的覆盖，即 $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$，

且
$$E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k, mE_k < +\infty,$$

则
$$E = \lim_{k \to \infty} E_k.$$

由于 $F(x)$ 在 E 上非负可积，由积分定义知

$$\lim_{k \to \infty} \int_{E_k} F(x) \mathrm{d}x = \int_E F(x) \mathrm{d}x < +\infty.$$

故对 $\forall \varepsilon > 0$，存在自然数 k_0，使

$$\int_E F(x) \mathrm{d}x - \int_{E_{k_0}} F(x) \mathrm{d}x = \int_{E - E_{k_0}} F(x) \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对固定的 k_0，由于 $mE_{k_0} < +\infty$，则由测度有限的勒贝格控制收敛定理有

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_{k_0}} f_n(x) \mathrm{d}x = \int_{E_{k_0}} f(x) \mathrm{d}x.$$

故对上面的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，使当 $n \geqslant N$ 时有

$$\left| \int_{E_{k_0}} f_n(x) \mathrm{d}x - \int_{E_{k_0}} f(x) \mathrm{d}x \right| = \left| \int_{E_{k_0}} [f_n(x) - f(x)] \mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

所以

$$\begin{aligned} & \left| \int_E f_n(x) \mathrm{d}x - \int_E f(x) \mathrm{d}x \right| \\ = & \left| \int_E [f_n(x) - f(x)] \mathrm{d}x \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\int_{E-E_{k_0}}[f_n(x)-f(x)]\mathrm{d}x+\int_{E_{k_0}}[f_n(x)-f(x)]\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{E-E_{k_0}}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x+\left|\int_{E_{k_0}}[f_n(x)-f(x)]\mathrm{d}x\right| \\
&< \int_{E-E_{k_0}}|f_n(x)|\mathrm{d}x+\int_{E-E_{k_0}}|f(x)|\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{3} \\
&\leqslant 2\int_{E-E_{k_0}}F(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{3} \\
&< \frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

[5.59] 举例说明勒贝格控制收敛定理中的控制函数的可积性是不可缺少的.

解 例如,取 $E=[0,+\infty)$,

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,n]\\ 0. & x\in(n,+\infty)\end{cases}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

设控制 $\{f_n(x)\}$ 的函数为 $F(x)$,则必有 $F(x)\geqslant 1$ a.e. 于 E,显然 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是不可积的,此时,$\{f_n(x)\}$ 的极限函数 $f(x)\equiv 1$,在 $[0,+\infty)$ 上也是不可积的.

又例如,$(0,+\infty)$ 上的函数列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+x^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

显然,在 $(0,+\infty)$ 上,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$,但是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\neq\int_0^{+\infty}0\mathrm{d}x=0.$$

即虽然处处有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$,但不能逐项积分,其原因在于不存在可积的控制函数.

[5.60] 证明：在$[a,b]$上的有界实函数$f(x)$黎曼可积的充要条件是$f(x)$的不连续点所成之集E的测度为零.

证 为证此题，先引进下列定义和引理：

定义 设$S(x,\delta)$是R^n中以x为中心，以δ为半径的开球，$f(x)$是R^n上的有界函数，令

$$M(f,S(x,\delta))=\sup_{y\in S(x,\delta)} f(y),$$

$$m(f,S(x,\delta))=\inf_{y\in S(x,\delta)} f(y),$$

$$\omega(f,S(x,\delta))=M(f,S(x,\delta))-m(f,S(x,\delta)),$$

$$\omega(f,x)=\lim_{\delta\to 0}\omega(f,S(x,\delta)).$$

显然$f(x)$在x处的连续性等价于$\omega(f,x)=0$. 若x为$f(x)$的不连续点，则有$\omega(f,x)>0$.

引理 若$f(x)$是定义在闭区间$[a,b]$上的有界实函数，则

$$A_n=E\left[x\mid x\in[a,b],\omega(f,x)\geqslant\frac{1}{n}\right]$$

是$[a,b]$中的闭集.

证明 若$\xi_0\in[a,b]-A_n$，则必有$\delta_0>0$，满足

$$\omega(f,\bar{S}(\xi_0,\delta_0)\cap[a,b])<\frac{1}{n},$$

从而若$\xi\in[a,b]\cap S(\xi_0,\delta_0)$，则必有

$$\omega(f,\xi)<\frac{1}{n}.$$

即 $\xi\bar{\in}A_n$，这就说明$[a,b]-A_n$的点都不是A_n的聚点，从而A_n的聚点都属于A_n，即A_n为闭集.

引理2 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的有界实函数，η为有限数，若$f(x)$在$[a,b]$的任一点x处都有

$$\omega(f,x)<\eta,$$

则有分划D_n：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

使得对应于D_n的达布大和S_{D_n}与小和s_{D_n}有

$$S_{D_n}-s_{D_n}<\eta(b-a).$$

证明 由题设及 $\omega(f,x)$ 的定义知，对 $[a,b]$ 上的任一点 x 都有

$$\Delta_x=(x-\delta_x,x+\delta_x),$$

使得

$$\omega(f,\Delta_x\cap[a,b])<\eta.$$

作

$$\Delta'_x=\left(x-\frac{\delta_x}{2},\ x+\frac{\delta_x}{2}\right),$$

则 $\{\Delta'_x\}$ 是 $[a,b]$ 的一个开复盖，依有限复盖定理，存在有限个开区间

$$\Delta'_{x_1},\ \Delta'_{x_2},\ \cdots,\ \Delta'_{x_n} \tag{1}$$

整个盖住 $[a,b]$，令

$$\delta=\min\left(\frac{\delta_{x_1}}{2},\frac{\delta_{x_2}}{2},\cdots,\frac{\delta_{x_n}}{2}\right),$$

则只要分划 D_n 满足

$$\max_i\{(x_i-x_{i-1})\}<\delta.$$

即可验证每一 $[x_{i-1},x_i]$ 都含于(1)的某一个 Δ'_{x_k} 中，从而由 Δ_x 的定义知

$$\omega(f,[x_{i-1},x_i])<\eta\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

于是

$$S_{D_n}-s_{D_n}=\sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\cdot(x_i-x_{i-1})$$

$$<\eta\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=\eta\cdot(b-a).$$

下证原题给出的命题.

必要性. 易证得 $E=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$，所以，若 $m^*E>0$，则必有 n_0，满足 $m^*A_{n_0}>0$. 因 $f(x)$ 是 (R) 可积的，故令

$$\varepsilon=\frac{m^*A_{n_0}}{2n_0},$$

对上述 $\varepsilon>0$，恒有分划 D_n：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

使得

$$\varepsilon > S_{D_n} - s_{D_n} = \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i]) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$\geqslant \sum_{\substack{A_{n_0} \cap [x_{i-1},x_i] \neq \varnothing \\ i=1,2,\cdots,n}} \omega(f,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1})$$

$$\geqslant \frac{m^* A_{n_0}}{n_0} = 2\varepsilon.$$

即　1>2 矛盾.

所以
$$m^* E = 0,$$
从而有
$$mE = 0.$$

充分性.　因 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数,故设 $|f(x)| \leqslant M$.

又因为 $mE=0, E=\sum_{n=1}^{\infty} A_n$. 故对每一个自然数 n,有 $mA_n=0$,从而对 $\forall\ \varepsilon>0$,必可找到 n_0 和开区间族

$$I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots.$$

满足

$$\frac{b-a}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$A_{n_0} \subset \sum_{i=1}^{\infty} I_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} mI_i < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

由引理 1, A_{n_0} 是闭集,从而由有限覆盖定理知,存在有限覆盖,即

$$A_{n_0} \subset \sum_{i=1}^{m} I'_i,$$

且
$$\sum_{i=1}^{m} mI'_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} mI_i < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

由于 $\sum_{i=1}^{m} I'_i$ 是开集,从而

$$F = [a,b] - \sum_{i=1}^{m} I'_i$$

是闭集,且由孤立点组成之集(记为 F_s)最多只有有限多个点,令

$$F_1 = F - F_s,$$

则 F_1 是有限个小闭区间的并，在每个小区间上应用引理 2，然后再把构成这些小区间的分划的所有分点与有限集 F_2 一并形成 $[a,b]$ 的一个分划 D^*，这时有

$$\begin{aligned}S_{D^*} - s_{D^*} &= \sum_{i=1}^{N}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\cdot(x_i - x_{i-1})\\&= \sum_{(x_{i-1},x_i)\subset F_1}\omega(f,[x_{i-1},x_i])(x_i - x_{i-1})\\&\quad + \sum_{(x_{i-1},x_i)\not\subset F_1}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\cdot(x_i - x_{i-1})\\&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.\end{aligned}$$

从而，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积.

[5.61] 证明

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}(p>-1).$$

证 由于当 $|x|<1$ 时，$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，所以在 $(0,1)$ 上

$$\frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{p+n}\ln\frac{1}{x},$$

则

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{p+n}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{p+n+1}}{p+n+1}\ln\frac{1}{x}\Big|_0^1 + \int_0^1\frac{x^{p+n}}{p+n+1}\mathrm{d}x\right)\\&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(p+n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}.\end{aligned}$$

[5.62] 求极限

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x.$$

解 因 $\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以

$$(R)\int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x$$

存在且与

$$(L)\int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x$$

的值相等.

又因为

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\right| \\
&\leqslant \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2} = \frac{nx}{1+n^2x^2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \frac{nx}{2nx}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

而$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$在(0,1)上可积,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx = 0, x\in[0,1]$$

由勒贝格控制收敛定理得:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(R)\int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty}(L)\int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

[5.63] 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\cdot t^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t = 1.$$

证 设 $f_n(t)=\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\cdot t^{\frac{1}{n}}}$, $t\in(0,+\infty)$,故

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\cdot t^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t.$$

于是

(i) $\{f_n(t)\}$是$[0,+\infty)$上的可测函数列；

(ii) $$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\cdot t^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{\frac{n}{t}\cdot t}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{t}}=\frac{1}{e^t}=e^{-t};$$

(iii) 当 $n\geqslant 2$ 时，由于$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$是关于 n 的单调函数，故当 $t\geqslant 1$ 时有

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\cdot t^{\frac{1}{n}}\geqslant\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\geqslant\left(1+\frac{t}{2}\right)^2,$$

于是

$$|f_n(t)|=\left|\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\cdot t^{\frac{1}{n}}}\right|$$

$$\leqslant\begin{cases}t^{-\frac{1}{2}}, & 0<t<1\\ \left(1+\frac{t}{2}\right)^{-2}\cdot & 1\leqslant t<+\infty.\end{cases}$$

由勒贝格控制收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\cdot t^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=1.$$

[5.64] 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln^p(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\mathrm{d}x=0.$$

其中 p 为任何固定的正数．

证　首先对任何 $p>0$，由洛必达法则知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^p(x+n)}{n}e^{-x}\cos x=0,$$

其次由$\ln x<x$ 可得

$$\frac{\ln^p(x+n)}{n}=\frac{\left[\ln n+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right]^p}{n}$$

$$\leqslant\frac{\left(1+\frac{x}{n}+\ln n\right)^p}{n}$$

$$=\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}+\frac{x}{n^{1+\frac{1}{p}}}+\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{p}}}\right)^p$$

$$\leqslant(1+x+1)^p=(2+x)^p\quad(\text{当 } n \text{ 充分大时})$$

$$\leqslant\begin{cases}4p, & 0<x<2\\ 2^px^p. & x\geqslant 2\end{cases}$$

取

$$F(x)=\begin{cases}4^pe^{-x}, & 0<x<2\\ 2^pe^{-x}\cdot x^p. & x\geqslant 2\end{cases}$$

则 $F(x)$在$(0,+\infty)$上的黎曼广义积分存在，因此在$(0,+\infty)$上 $F(x)$是(L)可积的，且对充分大的 n 有

$$|f_n(x)|=\left|\frac{\ln^p(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\right|\leqslant F(x),$$

由勒贝格控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln^p(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^p(x+n)}{n}e^{-x}\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}0\mathrm{d}x=0.$$

[5.65]　考察[0,1]上的函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1\\ 0. & x=0\end{cases}$$

的可积性.

解 $f(x)$在$[0,1]$上的勒贝格积分是不存在的，因为如果$f(x)$可积，则$|f(x)|$应该是可积的，由于$\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|$在$\left[\frac{1}{n},1\right]$上连续，故是黎曼可积的，从而

$$
\begin{aligned}
(L)\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x &\geqslant (L)\int_{\frac{1}{n}}^1 |f(x)|\mathrm{d}x \\
&= (R)\int_{\frac{1}{n}}^1 |f(x)|\mathrm{d}x \\
&= (R)\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x \to \infty (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

这说明$|f(x)|$不是(L)可积的.

[5.66] 如果

$$
f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^{\alpha}}\sin\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & x=0\end{cases}
$$

讨论$f(x)$在$[0,1]$上的可积性，如果

$$
g(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|^{\alpha}}\sin\frac{1}{x}, & |x|>0\\ 0, & x=0\end{cases}\quad(\alpha>0)
$$

讨论$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的可积性.

解 (i) 由题[5.65]知，$\alpha=1$时，$f(x)$在$[0,1]$上不是(L)可积的.

当$\alpha>1$时，$\frac{1}{x^{\alpha}}\geqslant\frac{1}{x}$，$x\in(0,1]$

所以

$$
\frac{1}{x^{\alpha}}\left|\sin\frac{1}{x}\right|\geqslant\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|,
$$

而$\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|$在$[0,1]$$(L)$不可积，所以

$$
\frac{1}{x^{\alpha}}\left|\sin\frac{1}{x}\right|, x\in(0,1]
$$

不是(L)可积的，从而$f(x)$在$[0,1]$上不是(L)可积的．

当$\alpha<1$时，$\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{x^\alpha}$，因为$\frac{1}{x^\alpha}$在$(0,1]$上为广义的黎曼可积函数，又$\frac{1}{x^\alpha}$非负，所以$\frac{1}{x^\alpha}$在$(0,1]$上$(L)$可积，从而$f(x)$在$[0,1]$上$(L)$可积．

综上讨论：$f(x)$在$[0,1]$上当$\alpha\geqslant1$时不是(L)可积的，当$\alpha<1$时是(L)可积的．

(ii) 由(i)的讨论，当$\alpha\geqslant1$时，$g(x)$在$[0,1]$上不是(L)可积的，所以，$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上也不是(L)可积的．

当$\alpha<1$时，要讨论$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的可积性，只须讨论$g(x)$在$[0,+\infty)$上的可积性即可．

由(i)知，在$[0,1]$上$g(x)$是可积的，在$(1,+\infty)$上，因$\frac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{x^\alpha}$的黎曼广义积分存在，所以$\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$上也是$(L)$可积的，从而$\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}$在$[0,+\infty)$上是$(L)$可积的，进而在$(-\infty,+\infty)$上是$(L)$可积的.

综上讨论：$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上，当$\alpha\geqslant1$时，不是(L)可积的，当$0<\alpha<1$时是(L)可积的．

五、重积分与二元可测函数

[5.67] 如果$f(x,y)$是有限矩形$[a,b]\times[c,d]$上的勒贝格可积函数，证明必可用

(1) 平面上的阶梯函数；

(2) 平面上的多项式函数；

(3) 平面上的三角多项式函数

按积分逼近，即对$\forall\ \epsilon>0$，必有上述三类中每一类中的一个函数$\varphi(x,y)$，使得

$$\int_c^d\int_a^b|f(x,y)-\varphi(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\epsilon.$$

证 (i) 把鲁金定理应用到二元可测函数上，即对$\forall\ \delta>0$，

可找到 $E=[a,b]\times[c,d]$ 中的闭子集 F_δ，使 $m(E-F_\delta)<\delta$，且 $f(x,y)$ 是 F_δ 上的连续函数(此定理的证明与一元函数的情形类似).

(ii) 闭集 $F_\delta(\subset E)$ 上的连续函数 $f(x,y)$ 可以连续地延拓到整个平面上，设 $g(x,y)$ 为 $f(x,y)$ 的延拓函数，即 $g(x,y)$ 为全平面上的连续函数，且在 F_δ 上有 $g(x,y)=f(x,y)$(此结论的证明见那汤松著《实变函数论》第十二章). 因此对 E 上的可积函数 $f(x,y)$ 及 $\forall\ \varepsilon>0$，存在着 E 上的连续函数 $g(x,y)$ 使

$$\int_c^d\int_a^b |f(x,y)-g(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\varepsilon.$$

(iii) 对 $E=[a,b]\times[c,d]$ 上任一连续函数 $g(x,y)$ 及 $\forall\ \varepsilon>0$，存在阶梯函数 $h(x,y)$，使对一切 $(x,y)\in E$ 有

$$|g(x,y)-h(x,y)|<\varepsilon.$$

事实上，把 E 的两边各 n 等分

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$
$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=d,$$

作函数 $h_n(x,y)$，在每个小矩形 $E_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ 上令

$$h_n(x,y)=\min_{(x,y)\in E_{ij}} g(x,y),$$

在 E 以外令 $h_n(x,y)=0$，则 $h_n(x,y)$ 为全平面上的阶梯函数，当 n 充分大时，显然有

$$|g(x,y)-h_n(x,y)|<\varepsilon.$$

(iv) 由(ii)、(iii)即知，对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在阶梯函数 $h(x,y)$ 使

$$\int_c^d\int_a^b |f(x,y)-h(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\varepsilon.$$

(Ⅴ) 因闭矩形上的连续函数可用平面上的二元多项式函数一致逼近，再由(ii)，对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在多项式函数 $P(x,y)$ 使

$$\int_c^d\int_a^b |f(x,y)-P(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\varepsilon.$$

(Ⅵ) 因多项式函数可用平面上的三角多项式逼近，由(Ⅴ)，对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在三角多项式 $S(x,y)$ 使

$$\int_c^d\int_a^b |f(x,y)-S(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\varepsilon.$$

[5.68] 设 $f(x),g(y)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，则 $f(x)g(y)$ 在 $S=[(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b]$ 上可积.

证 由设知 $|f(x)|,|g(y)|$ 都在 $[a,b]$ 上可积，故在平面 S 上，按面积测度而言，$|f(x)g(y)|$ 几乎处处有限，从而

$$\int_a^b|f(x)g(y)|\mathrm{d}x,\int_a^b|f(x)g(y)|\mathrm{d}y$$

分别几乎处处有限，于是由傅比尼定理有

$$\int_a^b\mathrm{d}y\int_a^b|f(x)g(y)|\mathrm{d}x=\int_a^b|g(y)|\mathrm{d}y\cdot\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\int_a^b|g(y)|\mathrm{d}y=\iint_S|f(x)g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于 $|f(x)|,|g(y)|$ 分别为 $[a,b]$ 上的可积函数，故

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x,\ \int_a^b|g(y)|\mathrm{d}y$$

皆为有限值，由上式即知

$$\iint_S|f(x)g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

也为有限值，从面 $f(x)g(y)$ 在 S 上可积.

[5.69] 设 $f(x)=\int_a^x\lambda(t)\mathrm{d}t\quad(a\leqslant x\leqslant b)$，$\mu(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，又设

$$g(x)=\int_a^x\mu(t)\mathrm{d}t,$$

试证明下述分部积分公式成立：

$$\int_a^b f(x)\mu(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\lambda(x)\mathrm{d}x.$$

证 由题意，$\lambda(x),\mu(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，因此由上题知，$\mu(x)\lambda(y)$ 在 $S=[(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b]$ 上可积，令

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\mu(x)\lambda(y), & a\leqslant y\leqslant x\\ 0. & 0<y\leqslant b\end{cases}$$

则 $\varphi(x,y)$ 为 S 上的可积函数，由傅比尼定理得

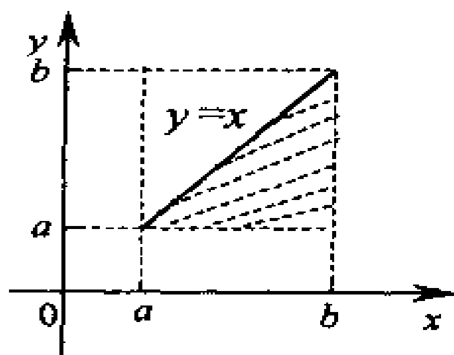


图 5—3

$$\iint_S \varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b \varphi(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b \varphi(x,y)\mathrm{d}x \qquad (*)$$

由 $\varphi(x,y)$ 的定义知

$$\int_a^b \varphi(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^x \mu(x)\lambda(y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_a^b \varphi(x,y)\mathrm{d}x=\int_y^b \mu(x)\lambda(y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \mu(x)\lambda(y)\mathrm{d}x-\int_a^y \mu(x)\lambda(y)\mathrm{d}x,$$

代入(*)得

$$\int_a^b \mu(x)\mathrm{d}x\int_a^x \lambda(y)\mathrm{d}y=\int_a^b \lambda(y)\mathrm{d}y\int_a^b \mu(x)\mathrm{d}x-\int_a^b \lambda(y)\mathrm{d}y\int_a^y \mu(x)\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)=\int_a^x \lambda(t)\mathrm{d}t, g(x)=\int_a^x \mu(t)\mathrm{d}t$，所以

$$\int_a^b \mu(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \mu(x)\mathrm{d}x\int_a^x \lambda(y)\mathrm{d}y$$

$$=f(b)\cdot g(b)-\int_a^b \lambda(y)g(y)\mathrm{d}y$$

$$=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b \lambda(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b \mu(x)f(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b \lambda(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

[**5.70**] 证明在 $S=\{(x,y)\mid -\infty\leqslant x\leqslant+\infty, -\infty\leqslant y\leqslant +\infty\}$ 上定义的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{当 } x^2+y^2>0 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x=y=0 \text{ 时}\end{cases}$$

它的两个累次积分都存在且相等，但 $f(x,y)$ 不是 S 上的可积函数.

证 对于 $x\neq 0$ 有

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{0^+}^{+\infty} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{x}{2}\int_{0^+}^{+\infty} \frac{d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\Bigg|_{y=0^+}^{y=+\infty}$$

$$= \frac{1}{2x}(x\neq 0);$$

$$\int_{-\infty}^{0^-} f(x,y)\mathrm{d}y = -\frac{x}{2}\,\frac{1}{x^2+y^2}\Bigg|_{y=-\infty}^{y=0^-} = -\frac{1}{2x}(x\neq 0)$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

同理有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = 0.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = 0.$$

但

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{|x|} \qquad (x\neq 0)$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{|x|} = +\infty.$$

由上可知，虽然 $f(x,y)$ 的两个累次积分都存在且相等，但在 S 上却非绝对可积，因此不是勒贝格可积的.

[5.71] 在 $R=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$ 上定义函数

$$f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

证明

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy \neq \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx.$$

这是否与傅比尼定理矛盾？何故？

证 因

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dx\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)dy$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1} dx = -\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \operatorname{arctg} x\Big|_1^0 = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 dy\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$$

$$= \int_0^1 dy\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy = \operatorname{arctg} y\Big|_1^0 = \frac{\pi}{4},$$

故

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy \neq \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx.$$

这个结果并不与傅比尼定理矛盾，因为傅比尼定理要求 $f(x,y)$ 可积，则积分可交换次序，但这里 $f(x,y)$ 不是可积的．

下面证明 $f(x,y)$ 在 R 上不可积．

取一个子区域：

$$D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, x < y < 1\} \subset R.$$

因 $f(x,y)$ 在 D 上有积分值，由傅比尼定理的推论知：

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_x^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dy$$

$$= \int_0^1 dx\int_x^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2x}\right)dx = +\infty.$$

故 $f(x,y)$ 在 D 上不可积，从而 $f(x,y)$ 在 R 上不可积．因此，此题

不适用于傅比尼定理，所以，此结论与傅比尼定理不矛盾．

[5.72]　当 $f(x)$，$g(x)$ 是直线上可积函数时，证明函数

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)g(x)\mathrm{d}x$$

(1) 是一个 $(-\infty,+\infty)$ 上的勒贝格可积函数，并且 $\widetilde{f*g}=\tilde{f}\cdot\tilde{g}$．(其中 $\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}f(x)\mathrm{d}x$，$i^2=-1$)

(2) 如果 f，g 有一个是有界的(不一定可积)，另一个可积时，$(f*g)(t)$ 还是 t 的连续函数．

证　(1) 由于 $f(t-x)$，$g(x)$ 均为可积函数，因此 $f(t-x)\cdot g(x)$ 是二元可测函数，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty,\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\mathrm{d}x<+\infty.$$

又由于

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t-x)g(x)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t-x)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<+\infty\end{aligned}\qquad(*)$$

所以，由傅比尼定理有，二次积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)g(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

存在，即 $(f*g)(t)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的可积函数．

注　$(*)$ 式中 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t-x)|\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$ 是通过积分的换元得到的，实际上在 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t-x)|\mathrm{d}t$ 中令 $t-x=T$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t-x)|\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(T)|dT=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t.$$

下面证明　$(\widetilde{f*g})=\tilde{f}\cdot\tilde{g}$.

事实上

$$
\begin{aligned}
\widetilde{(f*g)}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(t)e^{i\alpha t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)g(x)e^{i\alpha t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)e^{i\alpha(t-x)}g(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{i\alpha x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-x)e^{i\alpha(t-x)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{i\alpha x}\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha t}\mathrm{d}t\right) \\
&= \tilde{g}\cdot\tilde{f}.
\end{aligned}
$$

(2) 不妨设 $g(x)$ 为有界函数，即存在 $M>0$，使 $|g(x)|\leqslant M$；另设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的可积函数，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上几乎处处有界，不妨设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有界，即 $|f(x)|\leqslant L$（L 为常数），往证 $(f*g)(t)$ 是 t 的连续函数．

由于

$$
\begin{aligned}
&|(f*g)(t)-(f*g)(t_0)| \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\cdot|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant M\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x \qquad (**)
\end{aligned}
$$

由设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，故

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<+\infty.
\end{aligned}
$$

从而存在 $N_0>0$，对 $\forall\ \varepsilon>0$，有

$$
\int_{-\infty}^{-N_0}|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4},
$$

$$
\int_{N_0}^{+\infty}|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4},
$$

而在 $[-N_0,N_0]$ 上，由鲁金定理，对上述的 $\varepsilon>0$，与 $\delta=\frac{\varepsilon}{8L}>0$，存

在连续函数 $\varphi(x)$ 及闭集 $F\subset[-N_0,N_0]$，使

(i) $m([-N_0,N_0]-F)<\delta$；

(ii) $f(x)=\varphi(x),x\in F$；

(iii) 由 $\varphi(x)$ 的连续性，$\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t-x)=\varphi(t_0-x)$，

故
$$|\varphi(t-x)-\varphi(t_0-x)|<\frac{\varepsilon}{8N_0}(t\to t_0).$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_{-N_0}^{N_0}|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x\\
&=\int_F|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x+\\
&\quad\int\limits_{[-N_0,N_0]-F}|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_F|\varphi(t-x)-\varphi(t_0-x)|\mathrm{d}x+2L\cdot m([-N_0,N_0]-F)\\
&<\frac{\varepsilon}{8N_0}\cdot mF+2L\frac{\varepsilon}{8L}\leqslant\frac{\varepsilon}{8N_0}m[-N_0,N_0]+\frac{\varepsilon}{4}\\
&=\frac{\varepsilon}{8N_0}\cdot 2N_0+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{-N_0}|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{N_0}^{+\infty}|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{-N_0}^{N_0}|f(t-x)-f(t_0-x)|\mathrm{d}x\\
&<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

从而由（* *）式知：

$$|(f*g)(t)-(f*g)(t_0)|\leqslant M\cdot\varepsilon$$

由 ε 的任意性知

$$\lim_{t\to t_0}|(f*g)(t)-(f*g)(t_0)|=0.$$

所以 $(f*g)(t)$ 在 t_0 处连续，由 t_0 的任意性得 $(f*g)(t)$ 为 t 的连续函数.

[5.73] 设 $mX=1,mY=1,E$ 是 $X\times Y$ 中适合下述条件的子集：对每一个 x 与每一个 y，E_x 与 $X-E^y$ 都是可列集，那么 E 是不可测集.（其中，E_x，E^y 是集 E 的截口）

证 用反证法，设 E 是可测集，则有

$$mE=\iint_{X\times Y}\chi_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中

$$\chi_E(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in E\\ 0. & (x,y)\overline{\in} E\end{cases}$$

由傅比尼定理

$$\iint_{X\times Y}\chi_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_Y mE_x(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_X mE^y(x)\mathrm{d}x \qquad (*)$$

由于 E_x 与 $X-E^y$ 为可列集，所以

$$mE_x=0,m(X-E^y)=0$$

即
$$mE_x=0,mE^y=mX=1$$

所以
$$\int_Y mE_x(y)\mathrm{d}y=\int_Y 0\mathrm{d}y=0,$$

$$\int_X mE^y(x)\mathrm{d}x=\int_X 1\mathrm{d}x=mX=1.$$

此与 $(*)$ 式矛盾，所以 E 为不可测集.

六、有界变差函数　绝对连续函数　单调函数　李普希兹条件及导出点

[5.74] 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0\\ 0. & x=0\end{cases}$$

为区间[0,1]上的有界变差函数．

证 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\dfrac{\pi}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x\cos\frac{\pi}{x}=0,$$

故

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{\pi}{x}+\pi\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0\\ 0. & x=0\end{cases}$$

且

$$|f'(x)|\leqslant\left|2x\cos\frac{\pi}{x}\right|+\left|\pi\sin\frac{\pi}{x}\right|\leqslant 2+\pi \quad x\in[0,1]$$

所以 $f(x)$在[0,1]上每一点有有界导数．

故对[0,1]的任一分划

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1,$$

由拉格朗日中值公式有

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$\xi_k\in(x_{k-1},x_k)\ (k=1,2,\cdots,n).$$

则有

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})|$$

$$\leqslant(2+\pi)\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=2+\pi.$$

故

$$V_0^1(f)\leqslant 2+\pi.$$

从而，$f(x)$为$[0,1]$上的有界变差函数．

[5.75] 设$f(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数，且$f(x)\geqslant c>0$在$[a,b]$上处处成立，则$\frac{1}{f(x)}$也为$[a,b]$上的有界变差函数．

证 对$[a,b]$作分划

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

由于

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{f(x_i)}-\frac{1}{f(x_{i-1})}\right|=\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{f(x_i)f(x_{i-1})}\right|\\&\leqslant\frac{1}{c^2}|f(x_i)-f(x_{i-1})|,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_i)}-\frac{1}{f(x_{i-1})}\right|\\&\leqslant\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&\leqslant\frac{1}{c^2}V_a^b(f).\end{aligned}$$

故

$$V_a^b\left(\frac{1}{f}\right)\leqslant\frac{1}{c^2}V_a^b(f)<+\infty.$$

即 $\frac{1}{f(x)}$也为$[a,b]$上的有界变差函数．

[5.76] 若$f(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数，则$|f(x)|$也为$[a,b]$上的有界变差函数．

证 对$[a,b]$任作分划：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

由于

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\big||f(x_i)|-|f(x_{i-1})|\big|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant V_a^b(f)<+\infty,\end{aligned}$$

故

$$V_a^b(|f|) \leqslant V_a^b(f) < +\infty.$$

即 $|f(x)|$为$[a,b]$上的有界变差函数.

[5.77] 若 $f(x)$,$g(x)$都是$[a,b]$上的有界变差函数,则 $f(x)\cdot g(x)$也是$[a,b]$上的有界变差函数.

证 因 $f(x)$,$g(x)$都是$[a,b]$上的有界变差函数,即

$$V_a^b(f) < +\infty,\ V_a^b(g) < +\infty.$$

所以,$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上有界,即对一切 $x\in[a,b]$,有常数 M,K,使

$$|g(x)| \leqslant M, |f(x)| \leqslant K.$$

对$[a,b]$的任一分划:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

由于

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_i)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}|f(x_{i-1})g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n}|g(x_i)|\cdot|f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}|f(x_{i-1})|\cdot|g(x_i) - g(x_{i-1})| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}M\cdot|f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n}K\cdot|g(x_i) - g(x_{i-1})| \\
&\leqslant MV_a^b(f) + KV_a^b(g) < +\infty,
\end{aligned}$$

故 $f(x)g(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数.

[5.78] 设$\{f_n(x)\}$为$[a,b]$上的有界变差函数列,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$,$f(x)$为$[a,b]$上的有限函数,若

$$V_a^b(f_n) \leqslant K \quad (n = 1,2,\cdots),$$

则 $f(x)$ 也为$[a,b]$上的有界变差函数．

证 对$[a,b]$的任一分划 D：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b,$$

由于

$$\begin{aligned} V(D,f) &= \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left| \lim_{n\to\infty}(f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})) \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} |f_n(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} V_a^b(f_n) \leqslant K < +\infty. \end{aligned}$$

即 $V(D,f) \leqslant K$，由分划 D 的任意性知

$$V_a^b(f) \leqslant K,$$

即 $f(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数．

[5.79] 试证函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上为有界变差函数的充要条件是，存在一个单调增加函数 $\varphi(x)$，使对任意的 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ 有不等式成立：

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \varphi(x_2) - \varphi(x_1).$$

证 必要性．若 $f(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数，且对任何 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ 有

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant V_{x_1}^{x_2}(f) = V_a^{x_2}(f) - V_a^{x_1}(f),$$

令 $\varphi(x) = V_a^x(f)$，则 $\varphi(x)$为$[a,b]$上的单增函数，且

$$\varphi(x_2) = V_a^{x_2}(f),\ \varphi(x_1) = V_a^{x_1}(f),$$

从而

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \varphi(x_2) - \varphi(x_1).$$

充分性．若有单增函数 $\varphi(x)$，使对任意 $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ 有

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \varphi(x_2) - \varphi(x_1),$$

则对$[a,b]$的任一分划 D：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1}))$$
$$=\varphi(b)-\varphi(a)<+\infty.$$

所以
$$V_a^b(f)\leqslant\varphi(b)-\varphi(a)<+\infty.$$

即 $f(x)$为$[a,b]$上有界变差函数．

[5.80] 设连续函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上除去有限个点外，具有导数 $f'(x)$，而且$|f'(x)|\leqslant M$，证明 $f(x)$是有界变差函数．

证 依题设，用 $f'(x)$不存在的点为分点，将$[a,b]$分成有限个小区间，则在每个小区间上 $f'(x)$处处存在，且$|f'(x)|\leqslant M$，设$[a_1,b_1]$是一个小区间，下证 $f(x)$在$[a_1,b_1]$上是有界变差函数．

设分划 D：

$$a_1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b_1$$

是$[a_1,b_1]$的任一分划，由于 $f'(x)$在$[a_1,b_1]$中处处存在，故由拉格朗日中值定理知

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(\xi_k)(x_k-x_{k-1}),$$
$$\xi_k\in(x_{k-1},x_k)\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

故

$$V(D,f)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|f'(\xi_k)|\cdot|x_k-x_{k-1}|$$
$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=M(b_1-a_1)<+\infty.$$

即 $f(x)$为$[a_1,b_1]$上的有界变差函数．

由于 $f(x)$在每一子区间上是有界变差函数，而子区间的个数是有限的，从而 $f(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数．

[5.81] 举例说明连续函数不一定是有界变差函数．

解 例如

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1 \\ 0. & x=0 \end{cases}$$

是[0,1]上的连续函数,如果取分点

$$x_0=0,x_n=1,x_i=\frac{1}{[(n-1)-i]\pi+\dfrac{\pi}{2}}(i=1,2,\cdots,n-1)$$

为[0,1]的一个分划 D,那么

$$\begin{aligned} V(D,f)&=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\ &=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\sin\frac{1}{x_i}-x_{i-1}\sin\frac{1}{x_{i-1}}\right| \\ &>\sum_{i=1}^{n-2}\left\{\frac{1}{i\pi+\dfrac{\pi}{2}}+\frac{1}{(i-1)\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right\} \\ &=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n-2}\left\{\frac{1}{i+\dfrac{1}{2}}+\frac{1}{i-\dfrac{1}{2}}\right\} \\ &>\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{i}. \end{aligned}$$

但是当 $n\to\infty$ 时,即分划无限细密时有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=+\infty.$$

所以 $\sup\limits_{D}V(D,f)=+\infty.$

即 $V_0^1(f)=+\infty.$

所以 $f(x)$在[0,1]上不是有界变差函数.

[5.82] 设 α 是一实数,函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1 \\ 0. & x=0 \end{cases}$$

当 α 取什么值时,$f(x)$是[0,1]上的有界变差函数?

解 当 $\alpha=1$ 时,由上题知,$f(x)$不是有界变差函数.

当 $\alpha<1$ 时，取分点

$$x_k=\frac{1}{[(n-1)-k]\pi+\frac{\pi}{2}}\quad(k=1,2,\cdots,n-1).$$

仿上题的讨论可得

$$V_f(x_0,x_1,\cdots,x_n)>\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k^\alpha}.$$

因级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ 发散，所以，$\alpha<1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是有界变差函数.

当 $\alpha>1$ 时，作函数

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\left[\frac{1}{n\pi},1\right]\\ 0. & x\in\left[0,\frac{1}{n\pi}\right)\end{cases}$$

则

$$f_n(x)\to f(x)\ (n\to\infty)$$

在 $\left(\frac{1}{(k+1)\pi},\frac{1}{k\pi}\right)$ 上 $(k+1\leqslant n)$，因 $f_n(x)=f(x)$，

故令

$$f'_n(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}=0,$$

得

$$\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

由于正切函数是严格单调函数，故 $\alpha\operatorname{tg}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ 只有唯一解 $x_k\in\left(\frac{1}{(k+1)\pi},\frac{1}{k\pi}\right)$，即 x_k 为 $f'_n(x)$ 的零点，为 $f_n(x)$ 的驻点，从而 $f_n(x)$ 在区间上有唯一的极值点 x_k，不管 x_k 是极大值点，还是极小值点，$f_n(x)$ 在 $\left(\frac{1}{(k+1)\pi},x_k\right)$ 及 $\left(x_k,\frac{1}{k\pi}\right)$ 上均为单调函数，即 $f_n(x)$ 在这些区间上为有界变差函数，进而知，$f_n(x)$ 为 $[0,1]$ 上的有界变差函数.

另外，由于 $f_n(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{(k+1)\pi},\dfrac{1}{k\pi}\right)$ 上的最大绝对值不超过 $\dfrac{1}{(k\pi)^{\alpha}}$，所以它在 $\left(\dfrac{1}{(k+1)\pi},\dfrac{1}{k\pi}\right)$ 上的全变差不超过 $\dfrac{2}{(k\pi)^{\alpha}}$，于是，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上的全变差不超过 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{(k\pi)^{\alpha}}$，因为级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2}{(k\pi)^{\alpha}}$ $(\alpha>1)$ 收敛，所以序列 $\{V_0^1(f_n)\}$ 有界，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上为有界变差函数．

综上所述，当 $\alpha\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 不是有界变差函数，当 $\alpha>1$ 时，$f(x)$ 是有界变差函数．

[5.83] 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & 0<x\leqslant 1\\ 0, & x=0\end{cases}$$

当 $\beta>0$ 时的有界变差性，绝对连续性．

解 当 $\alpha\leqslant\beta$ 时，在 $[0,1]$ 上取分点，$x_0=0$，$x_n=1$，

$$x_i=\left[\frac{1}{[(n-1)-i]\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right]^{\beta}\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$\geqslant\sum_{i=2}^{n-1}\left|x_i^{\alpha}\cdot\sin\frac{1}{x_i^{\beta}}-x_{i-1}^{\alpha}\cdot\sin\frac{1}{x_{i-1}^{\beta}}\right|$$

$$=\sum_{i=2}^{n-1}\left\{\left[\frac{1}{((n-1)-i)\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}+\left[\frac{1}{(n-i)\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}$$

$$\geqslant\sum_{i=2}^{n-1}\left[\frac{1}{((n-1)-i)\pi+\dfrac{\pi}{2}}+\frac{1}{(n-i)\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right]$$

$$>\sum_{i=2}^{n-1}\left[\frac{1}{(n-i)\pi}+\frac{1}{(n-i+1)\pi}\right]$$

$$> \sum_{i=2}^{n-1} \frac{2}{(n-i+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

由于
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} = +\infty,$$

所以
$$\sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = +\infty,$$

即当 $\alpha \leqslant \beta$ 时，$f(x)$ 不是 $[0,1]$ 上的有界变差函数，从而也不是绝对连续函数．

当 $\alpha > \beta(\beta > 0)$ 时，因

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{x^{\beta}},$$

所以

$$|f'(x)| \leqslant \alpha x^{\alpha-1} + \beta x^{\alpha-\beta-1}.$$

又 $\alpha > \beta > 0$，即 $\alpha - 1 > -1$，$\alpha - \beta - 1 > -1$，从而

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}} \mathrm{d}x \text{ 与} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\beta-\alpha}}$$

收敛，故 $|f'(x)|$ 在 $[0,1]$ 上可积，且 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处存在且有限，故必有

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t.$$

事实上

$$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{\delta}^x f'(t)\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{\delta\to 0^+} \int_{\delta}^x \left[\alpha t^{\alpha-1} \sin \frac{1}{t^{\beta}} - \beta t^{\alpha-\beta-1} \cos \frac{1}{t^{\beta}}\right]\mathrm{d}t$$
$$= \lim_{\delta\to 0^+} t^{\alpha} \sin \frac{1}{t^{\beta}} \Big|_{\delta}^{x} = x^{\alpha} \sin \frac{1}{x^{\beta}} - 0 = f(x) - f(0).$$

即 $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$，从而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续（可积函数的不定积分是绝对连续函数）．从而也是有界变差函数．

综上所述，当 $\alpha\leqslant\beta$ 时，$f(x)$既不是[0,1]上的有界变差函数，也不是绝对连续函数；当 $\alpha>\beta$ 时，$f(x)$在[0,1]上既是有界变差函数，也是绝对连续函数.

[5.84] 证明函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0. & x=0\end{cases}$$

在[−1,1]上处处可微，但 $F(x)$不全连续.

证 当 $x\neq 0$ 时，

$$F'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2},$$

当 $x=0$ 时，

$$F'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}x\sin\frac{1}{x^2}=0.$$

所以

$$F'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0. & x=0\end{cases}$$

即 $F(x)$在[−1,1]上处处可微，但 $F(x)$不是全连续函数.

事实上，取

$$a_n=\sqrt{\frac{2}{(2n+1)\pi}},b_n=\sqrt{\frac{1}{n\pi}},$$

则由于级数

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[1-\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{2}{7}}\right.$$
$$\left.+\cdots+\sqrt{\frac{1}{k}}-\sqrt{\frac{2}{2k+1}}+\cdots\right]$$

是收敛的莱布尼兹级数，且收敛级数具有可结合性，所以级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{k\pi}} - \sqrt{\frac{2}{(2k+1)\pi}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{k}} - \sqrt{\frac{2}{2k+1}}\right)$$

是收敛的. 而

$$|F(b_n) - F(a_n)|$$

$$= \left|\frac{1}{n\pi}\sin\pi - \frac{2}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\right| = \frac{2}{(2n+1)\pi}.$$

级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)\pi} = \sum_{k=1}^{\infty}|F(b_k) - F(a_k)| = +\infty$$

是发散的.

于是对 $\varepsilon_0 = 1 > 0$,无论 δ 多么小,由于级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$$

收敛,故存在自然数 N,当 $n \geqslant N$ 时,对任意自然数 P,总有

$$\sum_{k=N}^{n+P}(b_k - a_k) < \delta.$$

但由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}|F(b_k) - F(a_k)| = +\infty,$$

故只要 P 充分大,就一定有

$$\sum_{k=n+1}^{n+P}|F(b_k) - F(a_k)| > 1 = \varepsilon_0.$$

所以,$F(x)$不是全连续函数.

[5.85] 作$[a,b]$上的有界变差函数 $f(x)$,使在$[a,b]$的任何子区间上,$f(x)$都不是连续函数.

解 取$[a,b]=[0,1]$,作函数

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}0, & \frac{2k}{2^n}\leqslant x<\frac{2k+1}{2^n},\\ \frac{1}{3^n}, & \frac{2k+1}{2^n}\leqslant x<\frac{2k+2}{2^n},\end{cases}$$

其中，$n=1,2,\cdots;k=0,1,2,\cdots,2^{n-1}-1$.

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$在$[0,1]$上显然收敛，其和函数记为$f(x)$，且$f(x)$为$[0,1]$上的单调增加函数．因此$f(x)$为$[0,1]$上的有界变差函数，但在点$x=\frac{k}{2^n}$处，由函数的构造知，$f(x)=f(x+0)$，$f(x)\neq f(x-0)$，因此$x=\frac{k}{2^n}$为$f(x)$的第一类不连续点，故$f(x)$的不连续点在$[0,1]$上处处稠密，所以在$[0,1]$的任何子区间上$f(x)$都不是连续函数．

[5.86] 设$f(x)$是$[a,b]$上的有界变差函数，那么

$$\frac{d}{dx}V_a^x(f)=|f'(x)|\quad a.e.\text{ 于}[a,b].$$

证 因$f(x)$为有界变差函数，由定义知，对于$\varepsilon=\frac{1}{2^n}$，存在一组分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

使

$$V_a^b(f)-\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|<\frac{1}{2^n}. \tag{1}$$

作$[a,b]$上的函数$f_n(x)$：

当$x\in(x_{k-1},x_k)$，$f(x_k)\geqslant f(x_{k-1})$时，令

$$f_n(x)=f(x)+C_{kn},$$

当$x\in(x_{k-1},x_k)$，$f(x_k)<f(x_{k-1})$时，令

$$f_n(x)=-f(x)+C_{kn},$$

其中C_{kn}为常数，它们这样选择：$f_n(a)=0$，且

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|=f_n(x_k)-f_n(x_{k-1}). \tag{2}$$

于是有

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}[f_n(x_k)-f_n(x_{k-1})]=f_n(b).$$

由(1)知

$$V_a^b(f)-f_n(b)<\frac{1}{2^n}.$$

其次,$V_a^x(f)-f_n(x)$为不减函数,即当 $x<\xi$ 时有

$$V_x^\xi(f)\geqslant f_n(\xi)-f_n(x).$$

事实上,当 x,ξ 属于同一区间(x_{k-1},x_k)时,由(2)

$$V_x^\xi(f)\geqslant|f(\xi)-f(x)|=f_n(\xi)-f_n(x).$$

当 x,ξ 不属于同一个(x_{k-1},x_k)时,不妨设

$$x<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_p<\xi,$$

则有

$$\begin{aligned}V_x^\xi(f)&=V_x^{x_k}(f)+V_{x_k}^{x_{k+1}}(f)+\cdots+V_{x_p}^\xi(f)\\&\geqslant|f(\xi)-f(x_p)|+|f(x_p)-f(x_{p-1})|\\&\quad+\cdots+|f(x_k)-f(x)|\\&\geqslant f_n(\xi)-f_n(x).\end{aligned}$$

从而 $V_a^x(f)-f_n(x)$为不减函数,故

$$0\leqslant V_a^x(f)-f_n(x)\leqslant V_a^b(f)-f_n(b)<\frac{1}{2^n}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}[V_a^x(f)-f_n(x)]\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[V_a^x(f)-f_n(x)]$$

收敛,由傅比尼定理(见夏道行等编《实变函数论与泛函分析(上)》P226 定理 8)得,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(V_a^x(f))'-f'_n(x)]$$

在$[a,b]$上几乎处处收敛,于是几乎处处有

$$\lim_{n\to\infty}[(V_a^x(f))' - f'_n(x)] = 0,$$

即 $$\frac{d}{dx}V_a^x(f) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \quad a.e \text{ 于}[a,b].$$

由 $f'_n(x)=\pm f'(x)$，$\frac{d}{dx}V_a^x(f)\geqslant 0$，得

$$\frac{d}{dx}V_a^x(f) = |f'(x)| a.e \text{ 于}[a,b].$$

[5.87] 设 $f(x)$为$[a,b]$上的全连续函数，证明

$$\int_a^b |f'(x)|dx = V_a^b(f).$$

证 对$[a,b]$作任意分划：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

由于 $f(x)$为$[a,b]$上全连续函数，故 $f'(x)$是可积函数，于是

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)dx\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(x)|dx \leqslant \int_a^b |f'(x)|dx.$$

由分划的任意性得到

$$V_a^b(f) \leqslant \int_a^b |f'(x)|dx. \tag{1}$$

下面证明相反的不等式．

设 $$S(x) = \sum_{i=1}^n C_i \chi_{[x_{i-1},x_i]},$$

其中 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，$C_i=1$ 或 $C_i=-1$，

$$\chi_{[x_{i-1},x_i]} = \begin{cases} 1, & x \in [x_{i-1},x_i] \\ 0. & x \overline{\in} [x_{i-1},x_i] \end{cases}$$

则

$$\int_a^b S(x)f'(x)dx = \sum_{i=1}^n C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)dx$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \left|C_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)dx\right| = \sum_{i=1}^n \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)dx\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant V_a^b(f).$$

对于 $f'(x)$，存在一列阶梯函数 $\sigma_n(x)$，使

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x) = f'(x).$$

作函数 $S_n(x)$：

$$S_n(x) = \begin{cases} 1, & \sigma_n(x) > 0 \text{ 时} \\ 0, & \sigma_n(x) = 0 \text{ 时} \\ -1. & \sigma_n(x) < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

则由上知

$$\int_a^b S_n(x) f'(x)\mathrm{d}x \leqslant V_a^b(f).$$

但是 $\{S_n(x)f'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 $|f'(x)|$，且 $|S_n(x)\cdot f'(x)| \leqslant |f'(x)|$，由勒贝格控制收敛定理有

$$\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)f'(x)\mathrm{d}x \leqslant V_a^b(f). \tag{2}$$

综合(1)，(2)即得

$$\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x = V_a^b(f).$$

[5.88] 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为绝对连续函数，且几乎处处存在非负导数，则 $f(x)$ 为增函数.

证 因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，所以对 $[a,b]$ 上的任意两点 $x_1 < x_2$，有 $f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t)\mathrm{d}t$，又由于 $f'(t) \geqslant 0$ $a.e$ 于 E，所以

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{x_1}^{x_2} 0\mathrm{d}x = 0,$$

即

$$f(x_1) \geqslant f(x_2),$$

所以 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的增函数.

[5.89] 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的单增函数，其值域在 $[f(a),f(b)]$ 中稠密，则 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数.

证 假设 $f(x)$ 不是 $[a,b]$ 上的连续函数，则存在 $x_0 \in [a,b]$，

使 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，因此必有

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0).$$

(当 $x_0=a$ 时，$f(x_0-0)=f(a)$，当 $x=b$ 时，$f(x_0+0)=f(b)$)，由 $f(x)$ 的单调性，$f(x)$ 不取区间 $(f(x_0-0),f(x_0+0))$ 中的任何值，但

$$(f(x_0-0),f(x_0+0))\subset[f(a),f(b)],$$

此与 $f(x)$ 的值域在 $[f(a),f(b)]$ 中稠密矛盾，所以，$f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数.

[5.90] 当区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 满足条件

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant M|x''-x'|^{\alpha}\quad(\alpha>0),$$

则称 $f(x)$ 满足 α 阶李普希兹条件.

试证，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $\alpha>1$ 阶的李普希兹条件，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数.

证 对任意 $x\in[a,b]$，将 $[a,x]$ n 等分：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=x,$$

$$x_k-x_{k-1}=\frac{x-a}{n}\qquad(k=1,2,\cdots,n).$$

由于 $f(x)$ 满足 $\alpha>1$ 阶的李普希兹条件，故有正数 M，使

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant M|x_k-x_{k-1}|^{\alpha}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

从而

$$\begin{aligned}|f(x)-f(a)|&=|f(x_n)-f(x_0)|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\\&\leqslant M\cdot\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k-1}|^{\alpha}=M\cdot\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x-a}{n}\right|^{\alpha}\\&=M\cdot n\cdot\frac{|x-a|^{\alpha}}{n^{\alpha}}=M\cdot\frac{|x-a|^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

上述不等式对任意自然数 n 都成立，注意到 $\alpha>1$，故得

$$0\leqslant|f(x)-f(a)|\leqslant M\cdot\frac{|x-a|^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}\longrightarrow0\quad(n\to\infty),$$

所以 $$f(x)=f(a).$$

由 x 的任意性知，$f(x)\equiv f(a)$，即 $f(x)$ 为$[a,b]$上的常量函数．

[5.91] 函数 $f(x)$在$[a,b]$上满足李普希兹条件的充要条件是：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使对$[a,b]$上任何一族开区间$\{(a_\nu,b_\nu)\}$，只要$\sum\limits_\nu(b_\nu-a_\nu)<\delta$，便有

$$\sum_\nu|f(b_\nu)-f(a_\nu)|<\varepsilon.$$

证 必要性 设 $f(x)$在$[a,b]$上满足李普希兹条件，则存在$M>0$，使对$\forall\ x',x''\in[a,b]$有

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant M|x''-x'|,$$

从而对$[a,b]$上任何开区间(a_ν,b_ν)有

$$|f(b_\nu)-f(a_\nu)|\leqslant M|b_\nu-a_\nu|$$

故对$[a,b]$的任何开区间族$\{(a_\nu,b_\nu)\}$，只要对任何 $\varepsilon>0$，$\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，当$\sum\limits_\nu(b_\nu-a_\nu)<\delta$ 时，就有

$$\sum_\nu|f(b_\nu)-f(a_\nu)|\leqslant\sum_\nu M|b_\nu-a_\nu|<M\delta=M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

充分性 依题意，对给定的 $\varepsilon_0>0$，存在 $\delta>0$，使对$[a,b]$上任何开区间族$\{(a_\nu,b_\nu)\}$，只要$\sum\limits_\nu(b_\nu-a_\nu)<\delta$，就有

$$\sum_\nu|f(b_\nu)-f(a_\nu)|<\varepsilon_0 \qquad (*)$$

取 $M=\frac{2\varepsilon_0}{\delta}$，即 $\varepsilon_0=\frac{M\delta}{2}>0$，对任意 $x',x''\in[a,b]$，不妨设 $x'<x''$.

(i) 若 $x''-x'<\delta$，则可取自然数 $N\geqslant1$，使

$$\frac{\delta}{2}<N(x''-x')<\delta,$$

即

$$\frac{\delta}{2N}<x''-x'<\frac{\delta}{N}.$$

由(*)式知

$$N|f(x'')-f(x')|<\varepsilon_0=\frac{M\delta}{2}.$$

故

$$|f(x'')-f(x')|<M\cdot\frac{\delta}{2N}<M|x''-x'|.$$

(ii) 若 $x''-x'\geqslant\delta$,则可取自然数 N,使

$$\frac{\delta}{2}\leqslant\frac{x''-x'}{N}<\delta,$$

即

$$\frac{N\delta}{2}\leqslant x''-x'<N\delta.$$

再把区间$[x',x'']$作 N 等分,设分点为

$$x'=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=x'',$$

则

$$(x_k-x_{k-1})<\delta.\quad(k=1,2,\cdots,N)$$

则由(*)式知

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|<\varepsilon_0\quad(k=1,2,\cdots,N)$$

从而

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant\sum_{k=1}^{N}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$<\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_0=N\varepsilon_0<N\cdot\frac{M\delta}{2}$$

$$=M\cdot\frac{N\delta}{2}\leqslant M|x''-x'|.$$

因此,不论何种情况,都有

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant M|x''-x'|,$$

即 $f(x)$在$[a,b]$上满足李普希兹条件.

[5.92] 证明:区间$[a,b]$上的函数 $f(x)$满足李普希兹条件

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|,\forall\ x_1,x_2\in[a,b]$$

等价于 $f(x)$为有界可测函数的不定积分.

证 "$\Longrightarrow$" 设 $f(x)$满足李普希兹条件,则 $f(x)$为绝对连续

函数，故 $f(x)$ 可表为 $[a,b]$ 上某个可积函数的不定积分（当然为可测函数），设

$$f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t+f(a),$$

下面证明 $f'(x)$ 是有界函数即可.

由李普希兹条件，对任何可微分的点 $x\in[a,b]$，当 $x+h\in[a,b]$ 时有

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant M|(x+h)-x|=M\cdot|h|,$$

即

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant M.$$

由此可知

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leqslant M.$$

即
$$|f'(x)|\leqslant M.$$

"$\Longleftarrow$" 如果 $f(x)$ 是某个有界可测函数的不定积分，设

$$f(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t+c.$$

其中 $g(x)$ 是有界可测函数，设 $|g(x)|\leqslant M$，则对 $\forall\ x_1,x_2\in[a,b]$ 有

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&=\left|\int_a^{x_1}g(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_2}g(t)\mathrm{d}t\right|\\&=\left|\int_{x_2}^{x_1}g(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{x_2}^{x_1}|g(t)|\mathrm{d}t\leqslant M|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 满足李普希兹条件.

[5.93] 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1. & x=0\end{cases}$$

由 $\varphi(x)$ 作函数 $f(x)$：

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\,\varphi(x), & x\geqslant 0\\ -\sqrt{-x}\,\varphi(x). & x<0\end{cases}$$

问 $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数是否存在?

解 当 $x>0$ 时,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt{x}\,\varphi(x)}{x}=\frac{1+x\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$$

$$\longrightarrow+\infty\quad(x\to0^{+}),$$

当 $x<0$ 时,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{-\sqrt{-x}\,\varphi(x)}{x}=\frac{\sqrt{-x}\,\varphi(x)}{-x}$$

$$=\frac{1+x\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{-x}}\longrightarrow+\infty\quad(x\to0^{-}).$$

所以,$f(x)$ 在 $x=0$ 的左右导数都存在且同时为 $+\infty$,因此,$f(x)$ 在 $x=0$ 处导数存在,且 $f'(0)=+\infty$(在广义极限意义下).

[**5.94**] 设开区间上的两个单调增加函数,若在一个稠密子集上相等,则它们具有相同的可微分点.

证 设 $f(x),g(x)$ 是 (a,b) 上的单调增加函数,E 为 (a,b) 的一个稠密子集.且在 E 上有 $f(x)=g(x)$.

设 $x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的可微分点,即对任何 $x\to x_0$ 都有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lambda\quad(\lambda\text{ 为有限数})$$

特别当 $x\in E$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}}\frac{g(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lambda\tag{1}$$

下面证明 $f(x_0)=g(x_0)$.

用反证法,若 $f(x_0)\neq g(x_0)$,不妨设 $f(x_0)<g(x_0)$($f(x_0)>g(x_0)$ 时,可类似证明).由于 $f(x),g(x)$ 单调增加,且有

$$\lim_{\substack{x\to x_0^{+}\\ x\in E}}g(x)=\lim_{\substack{x\to x_0^{+}\\ x\in E}}f(x)=f(x_0).$$

故对 $\varepsilon_0=\dfrac{g(x_0)-f(x_0)}{2}>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$，$x\in E$ 时，

有
$$f(x)-f(x_0)=g(x)-f(x_0)<\frac{g(x_0)-f(x_0)}{2},$$

即
$$g(x)<\frac{g(x_0)+f(x_0)}{2},$$
$$2g(x)<g(x_0)+f(x_0).$$

因 $x\in E$ 时 $g(x)=f(x)$，所以
$$2g(x)=f(x)+g(x)<g(x_0)+f(x_0),$$
$$g(x)<g(x_0)-[f(x)-f(x_0)].$$

由于 $f(x)-f(x_0)\geqslant 0$（因 $x>x_0$），所以
$$g(x)<g(x_0)-[f(x)-f(x_0)]\leqslant g(x_0).$$

即当 $x>x_0$ 时，有 $g(x)<g(x_0)$ 与 $g(x)$ 单调增加矛盾.

所以
$$f(x_0)=g(x_0).$$

故由(1)有
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lambda \tag{2}$$

再证对任何 x 有
$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lambda.$$

首先证明 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lambda$.

由于 E 在 (a,b) 中稠密，故对 $x>x_0$，可取 $x_1,x_2\in E$，使 $x_0<x_1<x<x_2$，且 $(x_2-x)\leqslant(x-x_0)^2$，$(x_1-x)\leqslant(x-x_0)^2$.

由 $g(x)$ 的单调性有
$$g(x_1)\leqslant g(x)\leqslant g(x_2),$$

即有
$$g(x_1)-g(x_0)\leqslant g(x)-g(x_0)\leqslant g(x_2)-g(x_0).$$

由于 $x-x_0>0$，所以有
$$\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{g(x_2)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

即

$$\frac{x_1-x_0}{x-x_0}\cdot\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0}\leqslant\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$\leqslant\frac{g(x_2)-g(x_0)}{x_2-x_0}\cdot\frac{x_2-x_0}{x-x_0}. \quad (3)$$

由于

$$1\leqslant\frac{x_2-x_0}{x-x_0}=1+\frac{x_2-x}{x-x_0}$$

$$\leqslant 1+\frac{(x-x_0)^2}{x-x_0}=1+(x-x_0)\to 1 \quad (x\to x_0^+).$$

$$1\geqslant\frac{x_1-x_0}{x-x_0}=1-\frac{x-x_1}{x-x_0}$$

$$\geqslant 1-\frac{(x-x_0)^2}{x-x_0}=1-(x-x_0)\to 1 \quad (x\to x_0^+).$$

所以有

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{x_2-x_0}{x-x_0}=1,\lim_{x\to x_0^+}\frac{x_1-x_0}{x-x_0}=1 \quad (4)$$

由于 $x_2\to x_0$ 时有 $x_1\to x_0$ 和 $x\to x_0$，所以由(2)，(4)有

$$\lim_{\substack{x_2\to x_0^+\\ x_2\in E}}\frac{x_1-x_0}{x-x_0}\cdot\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0^+}\frac{x_1-x_0}{x-x_0}\cdot\lim_{\substack{x_1\to x_0^+\\ x_1\in E}}\frac{g(x_1)-g(x_0)}{x_1-x_0}=1\cdot\lambda=\lambda,$$

$$\lim_{\substack{x_2\to x_0^+\\ x_2\in E}}\frac{g(x_2)-g(x_0)}{x_2-x_0}\cdot\frac{x_2-x_0}{x-x_0}$$

$$=\lim_{\substack{x\to x_0^+\\ x_2\in E}}\frac{g(x_2)-g(x_0)}{x_2-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0^+}\frac{x_2-x_0}{x-x_0}=\lambda\cdot 1=\lambda.$$

由(3)及极限的夹逼定理有

$$\lim_{\substack{x_2\to x_0^+\\ x_2\in E}}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lambda$$

类似可以证得 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lambda$.

所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lambda.$$

即 $x=x_0$ 是 $g(x)$ 的可微分点.

同理可证 $g(x)$ 的可微分点也是 $f(x)$ 的可微分点，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的可微分点.

［5.95］ 设对任何 n，$f_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上的增函数，且在 $[a,b]$ 上处处收敛于连续函数 $f(x)$，则收敛是一致收敛.

证 依题意，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故一致连续，因此对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，$|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，故可在 $[a,b]$ 上插入分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b,$$

将 $[a,b]$ 分成 m 个小区间，使 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\{|x_k-x_{k-1}|\}<\delta$，从而对 $\forall\ x',x''\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 均有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又 $f_n(x)$ 在每个分点 x_k 处收敛，即

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_k)=f(x_k)\quad(k=0,1,2,\cdots,m),$$

故对上述 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|f_n(x_k)-f(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(k=0,1,2,\cdots,m).$$

对任何 $x\in[a,b]$，x 必属于某个小区间 $[x_{k-1},x_k]$，即 $x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k$，注意到 $f_n(x)$ 为增函数且收敛于 $f(x)$，可知 $f(x)$ 也为增函数，且对每个 $x\in[a,b]$，有 $f_n(x)\leqslant f(x)$，从而有

$$\begin{aligned}f_n(x_{k-1})-f(x_k)&\leqslant f_n(x)-f(x_k)\leqslant f_n(x)-f(x)\\&\leqslant f_n(x_k)-f(x)\leqslant f_n(x_k)-f(x_{k-1}),\end{aligned}$$

即

$$f_n(x_{k-1})-f(x_k)\leqslant f_n(x)-f(x)\leqslant f_n(x_k)-f(x_{k-1})\ (*)$$

$$f_n(x_k) - f(x_{k-1}) = [f_n(x_k) - f(x_k)] + [f(x_k) - f(x_{k-1})]$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

但

$$f_n(x_{k-1}) - f(x_k) = [f_n(x_{k-1}) - f(x_{k-1})] + [f(x_{k-1}) - f(x_k)]$$
$$> -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = -\varepsilon$$

由(*)式得

$$-\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon$$

即

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

这说明 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

[5.96] 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数，当把它的不连续点的值修改成右连续(或左连续)时，所得的函数记为 $\overline{f}(x)$，证明，$f(x)$，$\overline{f}(x)$ 具有相同的可导点(具有有限导数的点).

证 不妨假设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的单增函数，设 x_0 为 $f(x)$ 的可导点，则对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon.$$

对任何固定的 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$，设 x 是 $f(x)$ 的不连续点，但取 $h>0$，使 $x<x+h<x_0+\delta$，当然也有

$$\left|\frac{f(x + h) - f(x_0)}{(x + h) - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon.$$

现令 $h\to 0^+$，并设 $\lim\limits_{h\to 0^+} f(x+h) = f(x)$ 存在(即修改 $f(x)$ 的不连续点成右连续)，由规定知

$$\lim_{h\to 0^+} f(x + h) = f(x + 0) = f(x) = \overline{f}(x),$$

则得

$$\left|\frac{f(x + 0) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

因可导点为 $f(x)$ 的连续点，由规定知 $f(x_0)=\overline{f}(x_0)$，所以(1)式

即为

$$\left|\frac{\overline{f}(x)-\overline{f}(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|\leqslant\varepsilon.$$

这说明 $\overline{f}(x)$ 在 x_0 处可导，且

$$\overline{f}'(x_0)=f'(x_0).$$

其次设 x_0 为 $\overline{f}(x)$ 的可导点，再把 $\overline{f}(x)$ 的不连续点修改成左连续所得的函数记为 $\dot{\overline{f}}(x)$，仿上讨论，$\dot{\overline{f}}(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\dot{\overline{f}}'(x_0)=\overline{f}'(x_0)$.

由不等式

$$\frac{\dot{\overline{f}}(x)-\dot{\overline{f}}(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{\overline{f}(x)-\overline{f}(x_0)}{x-x_0},$$

并注意 $\dot{\overline{f}}(x_0)=f(x_0)=\overline{f}(x_0)$　(x_0 为 $f(x)$ 的连续点)，即得 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=\overline{f}'(x_0)$.

综上所述，$f(x)$ 与 $\overline{f}(x)$ 有相同的可导点．

[5.97] 设 E 为直线上的零测集，试作一直线上单调增加函数，使得当 $x\in E$ 时，$f'(x)=+\infty$.

解　因 $mE=0$，所以，对 $\forall\ n$，可作开集 G_n，使得

$$G_n\supset E,\ mG_n<\frac{1}{2^n},$$

令

$$f_n(x)=m(G_n\cap(-\infty,x]).$$

由于 $x_1<x_2$ 时，$(G_n\cap(-\infty,x_1])\subset(G_n\cap(-\infty,x_2])$，故 $f_n(x)$ 为非负的单增函数，另外当 $x_0<x$ 时，

$$f_n(x)-f_n(x_0)=m(G_n\cap(x_0,x))\leqslant m(x_0,x)=x-x_0,$$

当 $x_0>x$ 时，类似地有 $f_n(x_0)-f_n(x)\leqslant x_0-x$，于是对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\varepsilon$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon$.

故 $f_n(x)$ 还是连续函数，并且对任一 $x\in R'=(-\infty,+\infty)$，

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant mG_n<\frac{1}{2^n}.$$

现令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x).$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$有收敛的优级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$,所以,级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$为绝对一致收敛级数,从而$f(x)$为非负连续的单增函数.

设$x_0\in E\subset G_n$,那么,当$h>0$充分小时,区间$[x_0,x_0+h]$(或$[x_0-h,x]$)含于某个G_n之中,即$(x_0,x_0+h)\subset G_n$,从而

$$m(G_n\cap(x_0,x_0+h))=m(x_0,x_0+h)=h.$$

于是

$$\begin{aligned}f_n(x_0+h)&=m\{(G_n\cap(-\infty,x_0])\cup(G_n\cap(x_0,x_0+h))\}\\&=f_n(x_0)+h.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}=1.$$

对每个自然数N,当$h>0$充分小时,总有$[x_0,x_0+h]\subset G_n$ $(1\leqslant n\leqslant N)$,因此

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|&=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}\right|\\&\geqslant\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{f_n(x_0+h)-f_n(x_0)}{h}\right|=N.\end{aligned}$$

令$h\to0^+$便得,$f'(x_0)=+\infty$.

由x_0的任意性,在E上恒有$f'(x)=+\infty$.

[5.98] 设函数$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处有有限导数,证明对任何$\delta>0$,必存在可测集$E_\delta\subset[a,b]$,$m([a,b]-E_\delta)<\delta$,使得对任何$\varepsilon>0$,都存在$\eta>0$,对一切$x\in E_\delta$,$x'\in[a,b]$,当$|x-x'|<\eta$时,成立

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

证 记

$$f(x,t)=\frac{f(x+t)-f(x)}{t}.$$

由题设知

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}=f'(x)\ a.e\ 于[a,b],$$

即

$$\lim_{t\to0}f(x,t)=f'(x)\ a.e\ 于[a,b].$$

取数列$\{h_n\}$，使 $h_n\searrow0$，令

$$g_n(x)=\sup_{0<|t|\leqslant h_n}f(x,t),h_n(x)=\inf_{0<|t|\leqslant h_n}f(x,t),$$

由于$\lim\limits_{t\to0}f(x,t)=f'(x)\ a.e$ 于$[a,b]$，故

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=f'(x)\ a.e\ 于[a,b],$$

$$\lim_{n\to\infty}h_n(x)=f'(x)\ a.e\ 于[a,b].$$

由叶果诺夫定理，对$\forall\ \delta>0$，存在可测集 $E_\delta\subset[a,b]$，$m([a,b]-E_\delta)<\delta$，在 E_δ 上，$g_n(x)$一致收敛于 $f'(x)$，$h_n(x)$一致收敛于 $f'(x)$.

即　$\forall\ \epsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，对一切 $x\in E_\delta$ 有

$$|g_n(x)-f'(x)|<\epsilon,|h_n(x)-f'(x)|<\epsilon.$$

由于

$$h_n(x)=\inf f(x,t)\leqslant f(x,t)\leqslant\sup f(x,t)=g_n(x).$$

$$(|t|\leqslant h_n,t\neq0)$$

所以，对一切 $x\in E_\delta$ 及对一切 t，$|t|\leqslant h_n,t\neq0$，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|f(x,t)-f'(x)|<\epsilon.$$

由于 $h_n\searrow0$，即存在 $\eta>0$，对一切 $x\in E_\delta,x'\in[a,b]$，当 $|x'-x|<\eta$ 时，就有

$$\left|\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}-f'(x)\right|<\epsilon.$$

[5.99]　设 $f(x)$是$[a,b]$上的可积函数，证明几乎处处成立着

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0,$$

其中 h_1,h_2 非负，且 $h=h_1+h_2$.

证 因为对 $\forall\ b>a>0$ 有

$$\frac{c+d}{a+b}-\frac{c}{a}=\frac{ad-bc}{(a+b)a},$$

$$\frac{d}{b}-\frac{c+d}{a+b}=\frac{ad-bc}{(a+b)\cdot b}.$$

故当 $ad>bc$ 时有

$$\frac{c}{a}<\frac{c+d}{a+b}<\frac{d}{b}.$$

当 $ad<bc$ 时有

$$\frac{d}{b}<\frac{c+d}{a+b}<\frac{c}{a}.$$

即$\frac{c+d}{a+b}$总为$\frac{c}{a}$与$\frac{d}{b}$之间的数，所以，不妨设

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h_1}\int_{x_0-h_1}^{x_0}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x\\ \leqslant&\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x\\ \leqslant&\frac{1}{h_2}\int_{x_0}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x\end{aligned}\qquad(*)$$

因此，只要证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0,$$

几乎处处成立就行了.

下面只证前一个式子，后一等式的证明完全相仿.

设 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$ 为有理数全体，由于 $f(x)$ 为$[a,b]$上的可积函数，故令

$$F_n(x)=\int_a^x|f(t)-r_n|\mathrm{d}t,$$

则 $F_n'(x)=|f(x)-r_n|\ a.e$ 于$[a,b]$. 记

$$E_n = \{x \mid F_n'(x) \neq |f(x) - r_n|, x \in [a,b]\},$$

则 $mE_n = 0$. 记

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n,$$

那么　$mE = 0$.

现设 $x_0 \in [a,b] - E$，对 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ r_i$，使

$$|f(x_0) - r_i| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

因 $x_0 \overline{\in} E$，所以，$F_i(x)$ 在 x_0 处有导数，且

$$F_i'(x_0) = |f(x_0) - r_i|.$$

因此，对上述的 $\varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，当 $h < \delta$ 时，

$$\left| \frac{F_i(x_0 + h) - F_i(x_0)}{h} - |f(x_0) - r_i| \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

即

$$\left| \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - r_i| \mathrm{d}x - |f(x_0) - r_i| \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

从而由(1),(2)两式得：

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (|f(x) - r_i| + |f(x_0) - r_i|) \mathrm{d}x \\
&= \left\{ \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - r_i| \mathrm{d}x - |f(x_0) - r_i| \right\} \\
&\quad + 2|f(x_0) - r_i| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{h \to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)| \mathrm{d}x = 0.$$

由 $x_0 \in [a,b] - E$ 的任意性及 $m\{[a,b] - E\} = b - a$ 就得到在 $[a,b]$ 上几乎处处有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0.$$

同理可证

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0.$$

由(*)式即知

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0+h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0.$$

[5.100] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足下面条件：对任何 $a\leqslant x_1<x_2<x_3\leqslant b$，总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

称这种函数为向上凸函数.

(1)证明，$f(x)$ 在 (a,b) 内连续；记 $f'_+(x)=D^+f(x)$，证明：$f'_+(x)$ 是 (a,b) 内的单调增加函数.

(2)证明：$f(x)$ 是 (a,b) 内任一闭区间上的绝对连续函数.

证 (1) 对 $\forall\ a\leqslant x_1<x_2<x_3\leqslant b$，

有
$$x_2-x_1>0,\ x_3-x_2>0,$$
$$(x_3-x_2)+(x_2-x_1)=x_3-x_1>0,$$

故由[5.99]开头的推导知

$\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$ 在 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 与 $\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ 之间. 不妨设

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.\quad(*)$$

令 $x_2\to x_1$，得到

$$D^+f(x_1)\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}<+\infty.$$

再令 $x_3\to x_1$，得到

$$D^+f(x_1)\leqslant D_+f(x_1).$$

但是

$$D^+ f(x_1) \geqslant D_+ f(x_1).$$

所以

$$D^+ f(x_1) = D_+ f(x_1).$$

因此，对$\forall\ x \in [a,b)$，$f(x)$在x处的右导数存在且有限，即$f'_+(x)$存在且有限．同理，对$\forall\ x \in (a,b]$，$f(x)$在x处的左导数存在且有限，即$f'_-(x)$存在且有限，并且对$\forall\ x \in (a,b)$，有

$$-\infty < f'_-(x) \leqslant f'_+(x) < +\infty.$$

由于$f(x)$在$x \in (a,b)$处的左、右导数皆存在且有限，所以$f(x)$在x处既左连续，且右连续，因此$f(x)$在x处连续，即$f(x)$为(a,b)上的连续函数．

其次由（ * ）式知，$D^+ f(x_1) \leqslant D^- f(x_3)$，而$D^- f(x_3) \leqslant D^+ f(x_3)$，因此$D^+ f(x_1) \leqslant D^+ f(x_3)$ $(x_1 < x_3)$，即有

$$f'_+(x_1) \leqslant f'_+(x_3).$$

所以$f'_+(x)$是单调增加函数．

(2) 证明$f(x)$在(a,b)内任一闭区间$[c,d]$上为绝对连续函数．

因为对$c < x_1 < x_2 < d$，由（ * ）式有

$$\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c} \leqslant \frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(d)-f(x_1)}{d-x_1} \leqslant \frac{f(d)-f(x_2)}{d-x_2},$$

故

$$\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(d)-f(x_2)}{d-x_2}.$$

由此知

$$f'_+(c) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'_-(d).$$

所以

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \leqslant \max(|f'_+(c)|, |f'_-(d)|) = k,$$

即

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant k|x_2 - x_1|.$$

故 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上满足李普希兹条件，所以 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上为绝对连续函数（见题后注）.

但 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上并非是绝对连续函数.

如取函数 $f(x)$ 如下：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1. & x = 1 \end{cases}$$

易知 $f(x)$ 满足题中所述条件，但 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不连续，所以，$f(x)$ 不是绝对连续函数.

注 若 $f(x)$ 满足李普希兹条件，则 $f(x)$ 为绝对连续函数.

事实上，设

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant M|x' - x''|,$$

对 $\forall\ \varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，这时对任何区间列 $\{(a_\nu,b_\nu)\}$，只要 $\sum_\nu(b_\nu-a_\nu)<\delta$，由李普希兹条件知，总有

$$\sum_\nu |f(b_\nu) - f(a_\nu)| \leqslant \sum_\nu M(b_\nu - a_\nu)$$

$$= M \cdot \sum_\nu (b_\nu - a_\nu) < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

所以，$f(x)$ 为绝对连续函数.

[5.101] 对于可测集 E，定义

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{mE(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}{2\delta}$$

为 E 在 x_0 的密度，试证明，几乎对所有的 $x\in E$，E 的密度为 1，几乎对所有的 $x\overline{\in} E$，E 的密度为 0.

证 (i) 先证 $mE<+\infty$ 的情形.

设线段 $[\alpha,\beta]$ 含于 E，又设 $a=\alpha-1$，$b=\beta+1$，则当 $x\in E$，且取 $0<\delta<1$ 时，有

$$(x - \delta, x + \delta) \subset [a,b].$$

由设 $\delta\to 0$，所以以下取 $0<\delta<1$.

作点集 E 的特征函数

$$x_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0. & x\in[a,b]-E\end{cases}$$

则 $x_E(x)$ 为非负有界可测函数，因而可积. 令

$$f(x)=\int_a^x x_E(t)\mathrm{d}t,$$

则 $f(x)$ 为一可积函数的不定积分，故为全连续函数，且 $f'(x)=x_E(x)a.e$ 于 $[a,b]$，即几乎对所有的 $x\in E$，有 $f'(x)=1$，几乎对所有的 $x\overline{\in}E$，有 $f'(x)=0$.

则对于 $[a,b]$ 中，$f'(x)$ 存在的点，若 $x\in E$，则

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta}=f'(x)=1,$$

从而

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x-\delta)}{2\delta}\\ &=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{2\delta}+\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x)-f(x-\delta)}{2\delta}.\\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}&f(x+\delta)-f(x-\delta)\\ &=\int_{x-\delta}^{x+\delta}x_E(t)\mathrm{d}t=\int_{E\cap(x-\delta,x+\delta)}1\mathrm{d}t\\ &=mE(x-\delta,x+\delta),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{m[E(x-\delta,x+\delta)]}{2\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x-\delta)}{2\delta}=1.$$

故对于 E 中几乎所有的点，其密度为 1.

但对于 $x\overline{\in}E$，且 $f'(x)$ 存在的点 x 上，

$$f'(x)=x_E(x)=0.$$

即

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta}=0.$$

所以

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x-\delta)}{2\delta}=0.$$

但

$$f(x+\delta)-f(x-\delta)=\int_{x-\delta}^{x+\delta}x_E(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{E\cap(x-\delta,x+\delta)}|\mathrm{d}t=m[E\cap(x-\delta,x+\delta)]$$

$$=mE[x_0|x_0\in(x-\delta,x+\delta)]$$

所以

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{mE[x_0(x_0\in(x-\delta,x+\delta)]}{2\delta}$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{f(x+\delta)-f(x-\delta)}{2\delta}=0$$

即几乎对所有的 $x\overline{\in}E$，E 的密度为 0.

(ii)当 $mE=+\infty$时，取 $E_k=E\cap[k,k+1]$，则

$$E=\sum_{-\infty}^{+\infty}E_k.$$

由(i)知，在每个 E_k 上，几乎对所有的 $x\in E_k\subset E$，有

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{mE_k(x-\delta,x+\delta)}{2\delta}=1,$$

几乎对所有的 $x\overline{\in}E_k$ 有

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{mE_k(x-\delta,x+\delta)}{2\delta}=0.$$

因此在$(-\infty,+\infty)$上几乎对所有 $x\in E$，E 的密度为 1. 几乎对所有 $x\overline{\in}E$ 有，E 的密度为 0.

[5.102] 设 $y(t)$是$[a,b]$上几乎处处有界的可测函数，又

$$Y(t)=\int_a^t y(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$\sup_{t',t''\in[a,b]}\left|\frac{Y(t')-Y(t'')}{t'-t''}\right|=\sup_{[a,b]}\mathrm{ess}|y(t)|.$$

其中

$$\sup_{[a,b]}\text{ess}\,|y(t)| = \inf_{\substack{E\\ mE=0}} \sup_{t\in[a,b]-E} |y(t)|.$$

证　因$\sup\limits_{[a,b]}\text{ess}\,|y(t)| = \inf\limits_{\substack{E\\ mE=0}} \sup\limits_{t\in[a,b]-E} |y(t)|$,

由下确界定义知，对$\forall\ \varepsilon_n=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，$\exists\ E_n\subset E$，且$mE_n=0$，使

$$\sup_{t\in[a,b]-E_n}|y(t)| < \sup_{[a,b]}\text{ess}\,|y(t)| + \frac{1}{n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

作$E_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，则$mE_0=0$，且$E_0\supset E_n$，所以

$$\begin{aligned}\sup_{[a,b]}\text{ess}\,|y(t)| &\leqslant \sup_{t\in[a,b]-E_0}|y(t)| \\ &\leqslant \sup_{t\in[a,b]-E_n}|y(t)| < \sup_{[a,b]}\text{ess}\,|y(t)| + \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

令$n\to\infty$时，由极限的夹逼性得

$$\sup_{[a,b]}\text{ess}\,|y(t)| = \sup_{\substack{t\in[a,b]-E_0\\ mE_0=0}}|y(t)| \tag{1}$$

对$\forall\ t',t''\in[a,b]$，不妨设$t'>t''$，则

$$\left|\frac{\bar{y}(t')-\bar{y}(t'')}{t'-t''}\right| = \frac{1}{|t'-t''|}\left|\int_{t''}^{t'}y(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{t'-t''}\int_{t''}^{t'}|y(t)|\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{t'-t''}\int_{(t'',t')\cap E_0}|y(t)|\mathrm{d}t + \frac{1}{t'-t''}\int_{(t'',t')\cap([a,b]-E_0)}|y(t)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant 0 + \frac{1}{t'-t''}\sup_{\substack{t\in[a,b]-E_0\\ mE_0=0}}|y(t)|(t'-t'')$$

$$= \sup_{\substack{t\in[a,b]-E_0\\ mE_0=0}}|y(t)| = \sup_{[a,b]}\text{ess}\,|y(t)|.$$

由t',t''的任意性知，

$$\sup_{t',t''\in[a,b]}\left|\frac{\overline{Y}(t')-\overline{Y}(t'')}{t'-t''}\right|\leqslant\sup_{[a,b]}\ \mathrm{ess}\,|y(t)| \tag{2}$$

反之，因为$\overline{Y}(t)=\int_a^t y(t)\mathrm{d}t$，$y(t)$是几乎处处有界的可测函数，因而 $y(t)$是可积函数，故$\overline{Y}(t)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，且$\overline{Y}'(t)=y(t)\,a.e$ 于$[a,b]$. 即存在子集 $N\subset[a,b]$，$mN=0$，使

$$\overline{Y}'(t)=y(t)\ a.e\ 于[a,b]-N.$$

即对 $t\in[a,b]-N$，$\overline{Y}'(t)=y(t)$，亦即$\forall\ t_n\in[a,b]$，当 $t_n\to t(n\to\infty)$时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{Y}(t_n)-\overline{Y}(t)}{t_n-t}=\overline{Y}'(t)=y(t).$$

因 $mN=0$，所以$[a,b]-N$ 在$[a,b]$上稠密. 所以对$\forall\ t\in[a,b]-N$，总可取 $t_n\in[a,b]-N$，使 $t_n\to t(n\to\infty)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{Y}(t_n)-\overline{Y}(t)}{t_n-t}=y(t).$$

但

$$\sup_{t_n,t\in[a,b]-N}\left|\frac{\overline{Y}(t_n)-\overline{Y}(t)}{t_n-t}\right|\geqslant\left|\frac{\overline{Y}(t_n)-\overline{Y}(t)}{t_n-t}\right|,$$

则有

$$|y(t)|=|\overline{Y}'(t)|\leqslant\sup_{t_n,t\in[a,b]-N}\left|\frac{\overline{Y}(t_n)-\overline{Y}(t)}{t_n-t}\right|$$

$$\leqslant\sup_{t',t''\in[a,b]-N}\left|\frac{\overline{Y}(t')-\overline{Y}(t'')}{t'-t''}\right|.$$

但由于上式对$\forall\ t\in[a,b]-N$ 成立，所以

$$\sup_{t\in[a,b]-N}|y(t)|\leqslant\sup_{t',t''\in[a,b]}\left|\frac{\overline{Y}(t')-\overline{Y}(t'')}{t'-t''}\right|.$$

于是

$$\sup_{[a,b]}\mathrm{ess}\,|(t)|=\inf_{\substack{E\\ mE=0}}\sup_{t\in[a,b]-N}|y(t)|$$

$$\leqslant\sup_{t\in[a,b]-N}|y(t)|\leqslant\sup_{t',t''\in[a,b]}\left|\frac{\overline{Y}(t')-\overline{Y}(t'')}{t'-t''}\right| \tag{3}$$

由(2)，(3)知

$$\sup_{t',t''\in[a,b]}\left|\frac{\overline{Y}(t')-\overline{Y}(t'')}{t'-t''}\right|=\sup_{[a,b]}\text{ess}\,|y(t)|.$$

七、杂　　题

[5.103]　(1) 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可积，证明

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

(2) 如果 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上关于 $g(x)$勒贝格—司蒂阶可积函数的，上式是否成立？

证　(1) 因 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可积，当然 $f(x)$在$[a-1,b+1]$上也可积，故对$\forall\ \varepsilon>0$，在$[a-1,b+1]$上存在连续函数 $\varphi(x)$，使

$$\int_{a-1}^{b+1}|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3},$$

从而

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{a-1}^{b+1}|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}.\quad(*)$$

由于 $h\to0$，故限制$|h|<1$ 时，也有

$$\begin{aligned}&\int_a^b|f(x+h)-\varphi(x+h)|\mathrm{d}x\\&=\int_{a+h}^{b+h}|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{a-1}^{b+1}|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}\qquad(*\ *)$$

由于 $\varphi(x)$在$[a-1,b+1]$上是连续函数，故 $\varphi(x)$一致连续，于是，存在 $\delta>0(\delta<1)$，当$|h|<\delta<1$ 时，对$[a,b]$中一切 x，由于

$$|(x+h)-x|=|h|<\delta,$$

故

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\qquad(*\ *\ *)$$

于是：由$(*)$、$(*\ *)$、$(*\ *\ *)$式知

$$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x+h)-\varphi(x+h)|\mathrm{d}x$$

$$+\int_a^b|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

(2) 但对于 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 勒贝格—司蒂阶可积时，上式未必成立.

例如取

$$g(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x\geqslant 0,\end{cases}\quad f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0\\ 1, x>0,\end{cases}$$

可知，在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 可积，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}g(x)=0.$$

而对 $\forall\ h>0$

$$f(x+h)-f(x)=\begin{cases}1, & -h<x\leqslant 0\\ 0. & x>0 \text{ 或 } x\leqslant -h.\end{cases}$$

因此

$$\int_{-1}^{1}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}g(x)=1\not\to 0\quad (h\to 0).$$

[5.104] 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，则

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

(即将题[5.103]中的有限区间推广到无限区间.)

证 $\forall\ \varepsilon>0$，因 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

所以，存在 $N_0>0$，使得

$$\int_{-\infty}^{-N_0}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4},\int_{N_0}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

于是当 $|h|<1$ 时，由题[5.103]知

$$\int_{-N_0}^{N_0} |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{N_0} |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{N_0}^{N_0} |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x + \int_{N_0}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

即

$$\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x = 0.$$

[5.105] 证明黎曼—勒贝格引理：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，则

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty} \tilde{f}(\alpha) = 0.$$

其中 $\tilde{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\mathrm{d}x \quad (i^2=-1)$.

证 由欧拉公式知

$$e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x.$$

故只须证明

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha x f(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ 和 } \lim_{\alpha\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha x f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

记

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha x f(x)\mathrm{d}x,$$

则

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha x f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\alpha x+\pi)\cdot f\left(x+\frac{\pi}{\alpha}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha x f\left(x+\frac{\pi}{\alpha}\right)\mathrm{d}x.$$

因此

$$2I(\alpha) = \int_{\infty}^{+\infty} \sin\alpha x f(x)\mathrm{d}x + \left[-\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha x f(x+\frac{\pi}{\alpha})\mathrm{d}x\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\alpha} \right) \right] \sin\alpha x \mathrm{d}x,$$

$$2|I(\alpha)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{\alpha} \right) \right| \mathrm{d}x.$$

当 $\alpha \to \pm\infty$ 时，$\frac{\pi}{\alpha} \to 0$，故由题[5.104]知，有

$$\lim_{\alpha \to \pm\infty} 2|I(\alpha)| = 0,$$

所以 $$\lim_{\alpha \to \pm\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha x f(x) \mathrm{d}x = 0.$$

同理有

$$\lim_{\alpha \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha x f(x) \mathrm{d}x = 0.$$

所以

$$\lim_{\alpha \to \pm\infty} \tilde{f}(\alpha) = 0.$$

[5.106] 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的可积函数，证明

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(t) \mathrm{d}t$$

是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数，且

$$\tilde{f}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-itx} - 1}{-it} f(t) \mathrm{d}t.$$

证 (i) $\tilde{f}(x + \Delta x) - \tilde{f}(x)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-it(x+\Delta x)} - e^{-itx}] f(t) \mathrm{d}t.$$

由于对任意实数 α 有

$$|e^{i\alpha}| = |\cos\alpha + i\sin\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1,$$

所以

$$|[e^{-it(x+\Delta x)} - e^{-itx}] \cdot f(t)| \leqslant 2|f(t)|.$$

又 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可积，所以 $|f(x)|$ 也在 $(-\infty, +\infty)$ 上可积，且

$$\lim_{\Delta x \to 0} (e^{-it\Delta x} - 1) = \lim_{\Delta x \to 0} [\cos(t\Delta x) - i\sin(t\Delta x) - 1] = 0$$

故由勒贝格控制收敛定理得：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}[\tilde{f}(x+\Delta x)-\tilde{f}(x)]\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\Delta x\to 0}[e^{-it(x+\Delta x)}-e^{-itx}]f(t)\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\Delta x\to 0}e^{-itx}[e^{-it\Delta x}-1]f(t)\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{-itx}\cdot f(t)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(e^{-it\Delta x}-1)]\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}t=0,
\end{aligned}
$$

即有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\tilde{f}(x+\Delta x)=\tilde{f}(x).$$

故 $\tilde{f}(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(ii) 令

$$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}-1}{-it}f(t)\mathrm{d}t,$$

往证 $\tilde{f}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$.

由于

$$
\begin{aligned}
&\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{e^{-it(x+\Delta x)}-1}{-it}-\frac{e^{-itx}-1}{-it}\right]\frac{f(t)}{\Delta x}\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}(e^{-it\Delta x}-1)}{-it}\frac{f(t)}{\Delta x}\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{it\Delta x}{2}}-e^{-\frac{it\Delta x}{2}}&=\left[\cos\frac{t\Delta x}{2}+i\sin\frac{t\Delta x}{2}\right]-\left[\cos\frac{t\Delta x}{2}-i\sin\frac{t\Delta x}{2}\right]\\
&=2i\sin\frac{t\Delta x}{2},
\end{aligned}
$$

且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{t\Delta x}{2}}{\frac{t\Delta x}{2}}=1,\ |e^{-itx}|=1,\ \left|e^{-i\frac{t\Delta x}{2}}\right|=1$$

所以有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{e^{-itx}(e^{-it\Delta x}-1)}{-it}\frac{f(t)}{\Delta x}\right|\\&=\left|\frac{e^{-it\Delta x}-1}{-it}\frac{f(t)}{\Delta x}\right|\cdot|e^{-itx}|\\&=\left|e^{\frac{-it\Delta x}{2}}\right|\cdot\left|\frac{e^{\frac{it\Delta x}{2}}-e^{-\frac{it\Delta x}{2}}}{i}\cdot\frac{f(t)}{t\Delta x}\right|\\&=\left|\frac{2\sin\frac{t\Delta x}{2}}{t\Delta x}f(t)\right|\leqslant|f(t)|.\end{aligned}$$

所以由勒贝格控制收敛定理得，

$$\begin{aligned}g'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}(e^{-it\Delta x}-1)}{-it}\frac{f(t)}{\Delta x}\mathrm{d}t\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}\left(e^{\frac{it\Delta x}{2}}-e^{-\frac{it\Delta x}{2}}\right)e^{-\frac{it\Delta x}{2}}}{it}\cdot\frac{f(t)}{\Delta x}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-itx}\cdot 2\sin\frac{t\Delta x}{2}}{t\Delta x}\cdot e^{-it\frac{\Delta x}{2}}f(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}f(t)\mathrm{d}t=\tilde{f}(x).\end{aligned}$$

即

$$\tilde{f}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-itx}-1}{-it}f(t)\mathrm{d}t.$$

[5.107] 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的复值函数，且 $f(x)$ 可积，证明

$$g(\alpha)=\int_{0}^{+\infty}e^{-i\alpha x}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x$$

在 α 的上半平面(即 $I_m\alpha>0$)是 α 的连续函数,并且是 α 的解析函数.

证 (i) 由题[5.106]知,$\tilde{f}(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,又由题[5.105]知,当 $x\to\infty$时,$\tilde{f}(x)\to 0$.

所以,存在常数 $\delta>0$ 及 $M>0$,当$|x|>M$ 时有 $|\tilde{f}(x)|<\delta$,从而,当$|x|>M$ 时有

$$|e^{i\alpha x}\tilde{f}(x)|\leqslant e^{-sx}\cdot|\tilde{f}(x)|\leqslant\delta\cdot e^{-sx}\quad(\alpha=t+is,s>0).$$

当 $s>0$ 时,由于 e^{-sx}在 $t\in(0,+\infty)$上可积,从而 $I_m\alpha>0$ 时 $e^{i\alpha x}\tilde{f}(x)$在$(0,+\infty)$上可积,这表明 $g(\alpha)$是在 α 的上半平面上的函数.

(ii) 下证 $g(\alpha)$是连续函数.

由于

$$|g(\alpha)-g(\alpha+\Delta\alpha)|\leqslant\int_0^{+\infty}|\tilde{f}(x)|\cdot|e^{i\alpha x}-e^{i(\alpha+\Delta\alpha)x}|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}|\tilde{f}(x)|\cdot|e^{i\alpha x}|\cdot|1-e^{i\Delta\alpha x}|\mathrm{d}x,$$

当 $\Delta\alpha\to 0$ 时,$1-e^{i\Delta\alpha x}\to 0$,由勒贝格控制收敛定理就得到

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_0^{+\infty}|\tilde{f}(x)|\cdot|e^{i\alpha x}|\cdot|1-e^{i\Delta\alpha x}|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}0\cdot\mathrm{d}x=0$$

即

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}g(\alpha+\Delta\alpha)=g(\alpha).$$

因此 $g(\alpha)$是 α 的连续函数.

(iii) 下证 $g(\alpha)$为 α 的解析函数.

设 $\tilde{f}(x)=u(x)+iv(x)$,$\alpha=t+is$ $(s>0)$,则

$$g(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{itx}e^{-sx}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-sx}[\cos tx+i\sin tx]\tilde{f}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx}[\cos tx + i\sin tx] \cdot [u(x) + iv(x)]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx}[u(x)\cos tx - v(x)\sin tx]\mathrm{d}x$$

$$+ i\int_0^{+\infty} e^{-sx}[u(x)\sin tx + v(x)\cos tx]\mathrm{d}x.$$

要证 $g(\alpha)$ 为上半平面的解析函数，又需证 $g(\alpha)$ 的实部和虚部满足柯西—黎曼条件，且实部和虚部的偏导数连续.

对 $g(\alpha)$ 的实部

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}[u(x)\cos tx - v(x)\sin tx]\mathrm{d}x$$

和虚部

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}[u(x)\sin tx + v(x)\cos tx]\mathrm{d}x$$

分别对 s,t 求导数，由勒贝格控制收敛定理知，可在积分号下对 s,t 求导数.

设 $g(\alpha)=g_1(t,s)+ig_2(t,s)$，则

$$\frac{\partial g_1(t,s)}{\partial t} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}[e^{-sx}(u(x)\cos tx - v(x)\sin tx)]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} - xe^{-sx}(u(x)\sin tx + v(x)\cos tx)\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\partial g_2(t,s)}{\partial s} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}[e^{-sx}(u(x)\sin tx + v(x)\cos tx)]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} - xe^{-sx}[u(x)\sin tx + v(x)\cos tx]\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\partial g_1(t,s)}{\partial s} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}[e^{-sx}(u(x)\cos tx - v(x)\sin tx)]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} - xe^{-sx}[u(x)\cos tx - v(x)\sin tx]\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\partial g_2(t,s)}{\partial t} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}[e^{-sx}(u(x)\sin tx + v(x)\cos tx)]\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} xe^{-sx}[u(x)\cos tx - v(x)\sin tx]\mathrm{d}x,$$

比较上面四个导数有

$$\frac{\partial g_1(t,s)}{\partial t}=\frac{\partial g_2(t,s)}{\partial s},\frac{\partial g_1(t,s)}{\partial s}=\frac{\partial g_2(t,s)}{\partial t}.$$

即 $g(\alpha)$满足柯西—黎曼方程，所以 $g(\alpha)$是 α 的解析函数.

[5.108] 设 $f(x)$在$[a,b]$上可积，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证 (i) 先证当 $f(x)\equiv 1$ 时结论成立.

设 $f(x)\equiv 1$，则

$$\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_a^b|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2n}\int_{na}^{nb}|\sin t|\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{2n}\left[\int_{2m_1\pi}^{2m_2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x+\int_{2m_2\pi}^{nb}|\sin x|\mathrm{d}x-\int_{2m_1\pi}^{na}|\sin x|\mathrm{d}x\right]$$

其中 m_1,m_2 为两个整数，且使

$$2m_1\pi\leqslant na<2(m_1+1)\pi,$$

$$2m_2\pi\leqslant nb<2(m_2+1)\pi.$$

故

$$0\leqslant nb-2m_2\pi<2\pi,\ 0\leqslant na-2m_1\pi<2\pi.$$

所以

$$\left|\int_{2m_2\pi}^{nb}|\sin x|\mathrm{d}x-\int_{2m_1\pi}^{na}|\sin x|\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_{2m_2\pi}^{nb}1\cdot\mathrm{d}x+\int_{2m_1\pi}^{na}1\cdot\mathrm{d}x=(nb-2m_2\pi)+(na-2m_1\pi)$$

$$<2\pi+2\pi=4\pi.\tag{1}$$

另外，令 $t=(x-2m_1\pi)/2(m_2-m_1)$，则

$$\int_{2m_1\pi}^{2m_2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=2(m_2-m_1)\int_0^\pi|\sin t|\mathrm{d}t$$

$$=4(m_2-m_1)\tag{2}$$

由于

$$nb-na>2m_2\pi-2(m_1+1)\pi=2(m_2-m_1-1)\pi,$$

$$nb-na<2(m_2+1)\pi-2m_1\pi=2(m_2-m_1+1)\pi,$$

即

$$2(m_2 - m_1 - 1)\pi < n(b-a) < 2(m_2 - m_1 + 1)\pi.$$

故存在 θ，$|\theta|<1$，使

$$n(b-a) = 2(m_2 - m_1 + \theta)\pi.$$

即

$$b - a = \frac{2(m_2 - m_1 + \theta)\pi}{n}$$

因此，由(1)，(2)两式知

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\pi}{2}\int_a^b |\sin nx| \mathrm{d}x - (b-a)\right| \\
&= \left|\frac{\pi}{2n}\int_{na}^{nb} |\sin x| \mathrm{d}x - (b-a)\right| \\
&= \left|\frac{\pi}{2n}\int_{na}^{nb} |\sin x| \mathrm{d}x - \frac{2(m_2 - m_1 + \theta)\pi}{n}\right| \\
&= \left|\frac{\pi}{2n}\left(\int_{na}^{nb} |\sin x| \mathrm{d}x - 4(m_2 - m_1)\right) - \frac{2\pi\theta}{n}\right| \\
&= \left|\frac{\pi}{2n}\left(\int_{na}^{nb} |\sin x| \mathrm{d}x - \int_{2m_1\pi}^{2m_2\pi} |\sin x| \mathrm{d}x\right) - \frac{2\pi\theta}{n}\right| \\
&= \left|\frac{\pi}{2n}\left(\int_{2m_2\pi}^{nb} |\sin x| \mathrm{d}x - \int_{2m_1\pi}^{na} |\sin x| \mathrm{d}x\right) - \frac{2\pi\theta}{n}\right| \\
&\leqslant \frac{\pi}{2n}\cdot 4\pi + \frac{2\pi\theta}{n} = \frac{2\pi^2}{n} + \frac{2\pi\theta}{n} \\
&= \frac{2\pi}{n}(\pi + \theta) \to 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

即有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2}\int_a^b |\sin nx| \mathrm{d}x = b - a = \int_a^b 1 \cdot \mathrm{d}x. \qquad (*)$$

所以当 $f(x)\equiv 1$ 时，等式成立.

(ii) 再证当 $f(x)$ 为简单函数时，结论成立.

若 $f(x)$ 为简单函数，即有 $[a,b] = \sum_{i=1}^{k} E_i$，其中 E_i 为互不相交的区间，且在每个 E_i 上 $f(x)$ 取常数 a_i，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

事实上，设 $E_i=\langle c_i,d_i\rangle$（$\langle c_i,d_i\rangle$ 为闭区间，开区间或半开区间）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{\sum\limits_{i=1}^k E_i}\alpha_i\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^k\int_{E_i}\alpha_i\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^k\alpha_i mE_i,$$

由（*）式知

$$\frac{\pi}{2}\int_{c_i}^{d_i}|\sin nx|\mathrm{d}x\to(d_i-c_i)\quad(n\to\infty).$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^k\int_{E_i}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^k\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_{c_i}^{d_i}f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^k\alpha_i(d_i-c_i)=\sum_{i=1}^k\alpha_i m(E_i)$$

$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) 当 $f(x)$ 为一般可积函数时，存在$[a,b]$上的一列简单函数 $\varphi_m(x)$，使 $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x)=f(x)$，且

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\varphi_m(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

因此，$\forall\ \varepsilon>0$，取充分大的 m，使

$$\int_a^b|f(x)-\varphi_m(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

对于 $\varphi_m(x)$，由(ii)知；存在 $N>0$，当 $n\geqslant N$ 时有

$$\left|\int_a^b\varphi_m(x)\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\int_a^b\varphi_m(x)|\sin nx|\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_a^b |(f(x) - \varphi_m(x)|\mathrm{d}x \\
&\quad + \left|\int_a^b \varphi_m(x)\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_a^b \varphi_m(x)|\sin nx|\mathrm{d}x\right| \\
&\quad + \frac{\pi}{2}\int_a^b |\varphi_m(x) - f(x)| \cdot |\sin nx|\mathrm{d}x \\
&< \epsilon + \epsilon + \frac{\pi}{2}\epsilon = (2 + \frac{\pi}{2})\epsilon.
\end{aligned}$$

即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

[5.109] 设 $f(x)$,$g(x)$是可测集 E 上的非负可测函数,又

$$E_y = E[x|g(x) \geqslant y],\varphi(y) = \int_{E_y} f(x)\mathrm{d}x,$$

则

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

证 对$\forall\ \epsilon>0$,记

$$\begin{aligned}
e_n &= E[x|n\epsilon \leqslant g(x) < (n+1)\epsilon] \\
&= E[x|g(x) \geqslant n\epsilon] - E[x|g(x) \geqslant (n+1)\epsilon] \\
&= E_{n\epsilon} - E_{(n+1)\epsilon} \qquad (n = 1,2,\cdots),
\end{aligned}$$

则

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} e_n.$$

故

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_{\sum\limits_{n=0}^{\infty}e_n} f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{e_n} f(x)g(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

又在 e_n 上有

$$n\varepsilon f(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant (n+1)\varepsilon f(x), \qquad (*)$$

下证对 $\forall\ \varepsilon>0$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\varphi(n\varepsilon) \leqslant \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\varphi(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\varphi(n\varepsilon).$$

(i)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\varphi(n\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty}n\varepsilon\varphi(n\varepsilon) - \sum_{n=1}^{\infty}n\varepsilon\varphi(n\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\varphi(n\varepsilon)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}n\varepsilon\varphi(n\varepsilon) - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\varepsilon\varphi(n\varepsilon)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}n\varepsilon\varphi(n\varepsilon) - \sum_{n=0}^{\infty}n\varepsilon\varphi[(n+1)\varepsilon]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}n\varepsilon[\varphi(n\varepsilon)-\varphi((n+1)\varepsilon)].\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}n\varepsilon[\varphi(n\varepsilon) - \varphi((n+1)\varepsilon)]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}n\varepsilon\Big[\int_{E[x, g(x)\geqslant n\varepsilon]}f(x)\mathrm{d}x\\
&\qquad - \int_{E[x|g(x)\geqslant(n+1)\varepsilon]}f(x)\mathrm{d}x\Big]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}n\varepsilon\int_{E[x|n\varepsilon\leqslant g(x)<(n+1)\varepsilon]}f(x)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}n\varepsilon\int_{e_n}f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{e_n}n\varepsilon f(x)\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{由}(*)\text{式}}{\leqslant} \sum_{n=0}^{\infty}\int_{e_n}g(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{由}(*)\text{式}}{\leqslant} \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varepsilon\int_{e_n}f(x)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\varepsilon[\varphi(n\varepsilon) - \varphi((n+1)\varepsilon)]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}n\varepsilon[\varphi(n\varepsilon) - \varphi((n+1)\varepsilon)]\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon[\varphi(n\varepsilon)-\varphi((n+1)\varepsilon)]$$

(iii) 由(i)知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\varphi(n\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}n\varepsilon[\varphi(n\varepsilon)-\varphi((n+1)\varepsilon]$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\varepsilon[\varphi(n\varepsilon)-\varphi((n+1)\varepsilon)]+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon[\varphi(n\varepsilon)-\varphi((n+1)\varepsilon)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\varphi(n\varepsilon)+\varepsilon\varphi(0).$$

综合(i)、(ii)、(iii)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\varphi(n\varepsilon)\leqslant\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\varphi(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\varphi(n\varepsilon).$$

又由于

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\varphi(0)=0.$$

从而对上式两端取极限得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\varphi(n\varepsilon)=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

注意到 $\varphi(y)$ 是 y 的非负单调下降函数，所以 $\varphi(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 上黎曼可积，从而，由定积分的定义可得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon\varphi(n\varepsilon)=\int_0^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

即

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

[5.110] 研究函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[10^n x]}{10^n}$$

的可微性，其中记号$[y]$表示数 y 与最接近的整数之间的距离，例如$[3.1]=0.1$，$[3.5]=0.5$，$[-1.2]=0.2$.

解 显然 $f(x)$ 以 1 为周期，因此，我们只对 $0\leqslant x<1$ 进行讨

论. 将 $x\in[0,1)$写成无穷小数的形式:

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

于是 $10^n\cdot x$ 的小数部分为 $0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}\cdots$

故

$$[10^nx]=0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}\cdots,\text{ 当 } 0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots\leqslant\frac{1}{2}\text{ 时.}$$

$$[10^nx]=1-0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}\cdots.\text{ 当 } 0.a_{n+1}a_{n+2}\cdots>\frac{1}{2}\text{ 时.}$$

下面证明$\forall\ x\in(0,1)$,$f(x)$不可微. 即要证:对任意固定的 x,可找到数列

$$h_m(m=1,2,\cdots),h_m\to 0\quad(m\to\infty)$$

但

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}.$$

不存在.

事实上,设 $x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,当 $a_m=4$ 或 9 时,取 $h_m=-10^{-m}$,否则取 $h_m=10^{-m}$,显然当 $n\to\infty$时,$h_m\to 0$,而

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{[10^n(x\pm 10^{-m})]}{10^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{[10^nx]}{10^n}}{\pm 10^{-m}}$$

$$=\pm 10^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[10^n(x\pm 10^{-m})]-[10^nx]}{10^n}.$$

显然,当 $n\geqslant m$ 时

$$[10^n(x\pm 10^{-m})]=[10^nx\pm 10^{n-m}]=[10^nx],$$

当 $n<m$ 时,则有

$$[10^n(x\pm 10^{-m})]=[10^nx\pm 10^{n-m}]=[10^nx]\pm 10^{n-m}.$$

从而

$$\pm 10^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[10^n(x\pm 10^{-m})]-[10^nx]}{10^n}$$

$$=\pm 10^m\left\{\sum_{n=0}^{m-1}\frac{[10^n(x\pm 10^{-m})]-[10^nx]}{10^n}\right.$$

$$+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{[10^n(x\pm 10^{-m})]-[10^n x]}{10^n}\Bigg\}$$

$$=\pm 10^m\left\{\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\pm 10^{n-m}}{10^n}+\sum_{n=m}^{\infty}0\right\}=\sum_{n=0}^{m-1}(\pm 1)$$

上式为 m 个 ± 1 相加，因此为整数，且当 m 为偶数时，其值为偶数，m 为奇数时，其值也为奇数，即

$$\left\{\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}\right\}$$

是一个奇偶相间的整数列，这样的数列肯定不会收敛. 故

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$$

不存在. 所以 $f(x)$ 不可微，由 x 的任意性得：$f(x)$ 处处不可微. 但 $f(x)$ 处处连续，事实上，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[10^n x]}{10^n}$$

的每一项连续，而此函数项级数有收敛的优级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}$，故函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{[10^n x]}{10^n}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，所以和函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

[5.111] 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，在 $[a,b]$ 上一分点组：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

记

$$V_f^2(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}-\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}\right|.$$

如对一切分点组，数集 $T=\{V_f^2(x_0,x_1,\cdots,x_n)\}$ 有上界，证明：

(i) 函数 $f(x)$ 必满足李普希兹条件；

(ii) 在每一点 x 处有 $D^+f(x)=D_+f(x)$，$D^-f(x)=D_-f(x)$；

(iii) 记 $D^+f(x)=f'_+(x)$，$D^-f(x)=f'_-(x)$，则 $f'_+(x)$，$f'_-(x)$都是有界变差函数.

证 (i) 设 M 为集$\{V_f^2(x_0,x_1,\cdots,x_n)\}$的上界，则$\forall\ x\in(a,b)$，即 $a<x<b$ 有：

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right|\leqslant M. \tag{1}$$

若

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{f(b)-f(x)}{b-x}<0,$$

则分别有

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\leqslant M,\left|\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right|\leqslant M.$$

若

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{f(b)-f(x)}{b-x}>0,$$

由于

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|=\left|\frac{f(b)-f(x)+f(x)-f(a)}{b-a}\right|$$
$$=\left|\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\cdot\frac{b-x}{b-a}+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{b-a}\right|, \tag{2}$$

故$\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$及$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$中至少有一个小于或等于 M，不然的话，则有

$$\left|\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right|>M,\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|>M,$$

则由(2)知：

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|>M\left|\frac{b-x}{b-a}+\frac{x-a}{b-a}\right|=M.$$

但对一切分点组，数集 $T=\{V_f^2(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$有上界 M，特别有 $V_f^2(a,b)<M$，即

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leqslant M,$$

从而矛盾.

故不论哪种情形，总可设

$$\left|\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right| \leqslant M. \tag{3}$$

于是，对$\forall\ x\in(a,b)$，由(1)及(3)得：

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\\ \leqslant &\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right|\\ &+\left|\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right| \leqslant 2M.\end{aligned}$$

因此

$$\left|\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right| \leqslant 2M,\ \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leqslant 2M \tag{4}$$

对(a,b)中的一切 x 都成立.

于是对$\forall\ a<x_1<x_2<b$，由(1)，(4)得：

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\\ \leqslant &\frac{1}{2}\left\{\left|\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\right.\\ &+\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2}\right|\\ &\left.+\left|\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}\right|+\left|\frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2}\right|\right\}\\ \leqslant &\frac{1}{2}\cdot 6M = 3M.\end{aligned}$$

因此，对$\forall\ x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1\neq x_2$，都有

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant 3M|x_1-x_2|,$$

即 $f(x)$满足李普希兹条件.

(ii) 用反证法，设存在 $x\in[a,b)$，有

$$D^+ f(x) > D_+ f(x).$$

记 $C=D^+f(x)-D_+f(x)$，则 $C>0$. 由定义，存在单调下降且趋于 x 的点列$\{x_n\}$，使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=D^+f(x),$$

存在单调下降且趋于 x 的点列 $\{y_n\}$，使

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x}=D_+f(x).$$

由于 $D^+f(x)$，$D_+f(x)$ 存在，故不妨设

$$a\leqslant x<\cdots<y_n<x_n<\cdots<y_2<x_2<y_1<x_1<b,$$

且

$$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}>D^+f(x)-\frac{C}{4}=\frac{3D^+f(x)+D_+f(x)}{4}.$$

从而

$$f(x_n)-f(x)>\frac{3D^+f(x)+D_+f(x)}{4}(x_n-x),(n=1,2,\cdots)\tag{A}$$

$$\frac{f(y_n)-f(x)}{y_n-x}<D_+f(x)+\frac{C}{4}=\frac{D^+f(x)+3D_+f(x)}{4}$$

从而

$$f(y_n)-f(x)<\frac{D^+f(x)+3D_+f(x)}{4}(y_n-x),n=1,2,\cdots$$

即

$$f(x)-f(y_n)>\frac{1}{4}[D^+f(x)+3D_+f(x)](x-y_n)\ n=1,2,\cdots\tag{B}$$

故对 $\forall\ n$，由(A)、(B)两式得

$$\begin{aligned}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}&=\frac{f(x_n)-f(x)+f(x)-f(y_n)}{x_n-y_n}\\&>\frac{\frac{1}{4}[D^+f(x)+D_+f(x)](x_n-x+x-y_n)}{x_n-y_n}\\&\quad+\frac{\frac{1}{2}D^+f(x)(x_n-x)-\frac{1}{2}D_+f(x)(y_n-x)}{x_n-y_n}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}[D^+ f(x) + D_+ f(x)]$$

$$+ \frac{(x_n - x)[D^+ f(x) - D_+ f(x)]}{2(x_n - y_n)} + \frac{1}{2}D_+ f(x) \quad (A')$$

仍由(A)、(B)两式得：

$$\frac{f(y_{n-1}) - f(x_n)}{y_{n-1} - x_n}$$

$$= \frac{f(y_{n-1}) - f(x) + f(x) - f(x_n)}{y_{n-1} - x_n}$$

$$< \frac{\frac{1}{4}[D^+ f(x) + D_+ f(x)](y_{n-1} - x + x - x_n)}{y_{n-1} - x_n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}D_+ f(x)(y_{n-1} - x) - \frac{1}{2}D^+ f(x)(x_n - x)}{y_{n-1} - x_n}$$

$$= \frac{1}{4}[D^+ f(x) + D_+ f(x)]$$

$$+ \frac{(x_n - x)[D_+ f(x) - D^+ f(x)]}{2(y_{n-1} - x_n)} + \frac{1}{2}D_+ f(x) \quad (B')$$

由(A')、(B')两式，并注意$a \leqslant x < \cdots < x_{n+1} < y_n < x_n < y_{n-1}$，故

$$x_n - x > x_n - y_n > 0, \quad y_{n-1} - y_n > y_{n-1} - x_n > 0,$$

所以

$$\frac{(x_n - x)(y_{n-1} - y_n)}{(x_n - y_n)(y_{n-1} - x_n)} > 1.$$

于是

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} - \frac{f(y_{n-1}) - f(x_n)}{y_{n-1} - x_n}$$

$$> \frac{1}{2}[D^+ f(x) - D_+ f(x)](x_n - x)\left(\frac{1}{x_n - y_n} + \frac{1}{y_{n-1} - x_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}[D^+ f(x) - D_+ f(x)]\frac{(x_n - x)(y_{n-1} - y_n)}{(x_n - y_n)(y_{n-1} - x_n)}$$

$$> \frac{1}{2}[D^+ f(x) - D_+ f(x)] = \frac{1}{2}C.$$

同理得

$$\left| \frac{f(y_n) - f(x_n + 1)}{y_n - x_{n+1}} - \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right| > \frac{1}{2}C.$$

$\forall\ n$，取$[a,b]$的分点组：

$$a \leqslant x < y_n < x_n < \cdots < y_1 < x_1 \leqslant x_0 = b$$

则

$$V_f^2(a, x, y_n, x_n, \cdots, y_1, x_1, x_0)$$

$$\geqslant \sum_{i=2}^{n} \left| \frac{f(x_i) - f(y_i)}{x_i - y_i} - \frac{f(y_{i-1}) - f(x_i)}{y_{i-1} - x_i} \right|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{f(y_i) - f(x_{i+1})}{y_i - x_{i+1}} - \frac{f(x_i) - f(y_i)}{x_i - y_i} \right|$$

$$> \frac{C}{2}(n - 1 + n - 1) = (n - 1) \cdot C.$$

因 $C>0$，故$\{V_f^2(a, x, y_n, x_n, \cdots, y_1, x_1, x_0)\}$无上界，这与题设矛盾。

故必有 $D^+f(x)=D_+f(x)$.

同理可证：对$\forall\ x\in(a,b]$有 $D_-f(x)=D^-f(x)$.

(iii) 对分点组 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 和$\forall\ n$，取 y_n 使 $x_n>y_n>x_{n-1}$，由于$\{V_f^2(x_0, x_1, \cdots, x_n)\}$有上界 $M>0$，故

$$\sum_n \left| \frac{f(y_n) - f(x_{n-1})}{y_n - x_{n-1}} - \frac{f(y_{n+1}) - f(x_n)}{y_{n+1} - x_n} \right|$$

$$\leqslant \sum_n \left| \frac{f(y_n) - f(x_{n-1})}{y_n - x_{n-1}} - \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} \right|$$

$$+ \sum_n \left| \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} - \frac{f(y_{n+1}) - f(x_n)}{y_{n+1} - x_n} \right|$$

$$\leqslant 2M.$$

再令 $y_n \to x_{n-1}$，由上式便知：

$$\sum_n |f'_+(x_{n-1}) - f'_+(x_n)| \leqslant 2M.$$

这说明 $f'_+(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数.

同理可证，$f'_-(x)$也为$[a,b]$上的有界变差函数.

[5.112] 当区间$[a,b]$上的函数满足

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant k|x'-x''|^{\alpha}\quad(\alpha>0,k\text{ 为常数})$$

时，称 $f(x)$满足 α 阶李普希兹条件.

(1) 作一个不满足任何阶李普希兹条件的有界变差函数；

(2) 又设 $\alpha<1$ 为已知，作一函数满足 α 阶李普希兹条件，但不是有界变差函数.

解 (1) 作函数 $f(x)$如下：

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\ln x}, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 0, & x=0\end{cases}$$

此函数在$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$上是连续的，严格单增的，因此是有界变差的.

下证对任意的 $\alpha>0$，$f(x)$不满足李普希兹条件.

(i) 设 $0<\alpha\leqslant1$，取 $x_1=0$，由于

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|^{\alpha}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\dfrac{1}{\ln x}}{x^{\alpha}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\alpha x^{-\alpha}=+\infty.$$

所以，对$\forall\ k>0$，$\exists\ x_0\in(0,\dfrac{1}{2}]$，使

$$\frac{|f(x_2)-f(0)|}{|x_2-0|^{\alpha}}>k,$$

即

$$|f(x_2)-f(0)|>k|x_2-0|^{\alpha}.$$

因此，$f(x)$不满足 α 阶$(0<\alpha\leqslant1)$李普希兹条件.

(ii) 对 $\alpha>1$，由题[5.90]知，若 $f(x)$满足 $\alpha>1$ 阶的李普希兹条件，则 $f(x)$为常数函数，而现在的 $f(x)\neq$常数，所以，$f(x)$不满足 $\alpha>1$ 阶的李普希兹条件.

综上讨论知，$f(x)$是不满足任何阶的李普希兹条件的有界变

差函数.

(2) 设 $\alpha<1$ 为已知，设 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 是任意正项收敛级数，且 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n>\cdots>0$，并设：

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, S_0=0, S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k \quad (n=1,2,\cdots).$$

在 $[0,S]$ 上构造函数 $f(x)$ 如下：

$f(x)=0$，在点 $0,S_1,S_2,S_3,\cdots$ 处；

$f(x)=\frac{1}{n}$，在 $S_{n-1}+\frac{a_n}{2}(n=1,2,3,\cdots)$ 处；

$f(S)=0$；

$f(x)$ 在任意形如 $[S_{n-1},S_{n-1}+\frac{a_n}{2}]$ 和 $[S_{n-1}+\frac{a_n}{2},S_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ 的区间上是线性的.

$f(x)$ 的略图如下：

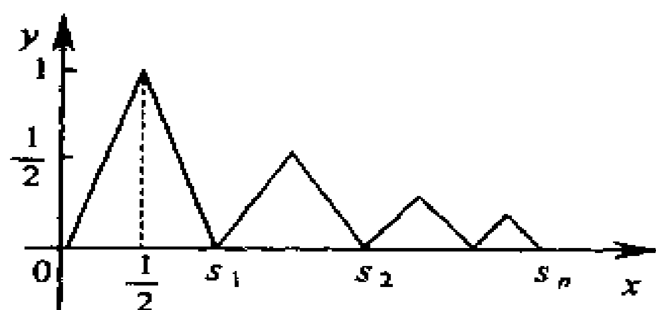


图 5—4

显然 $f(x)$ 在 $[0,S]$ 上连续，但不是有界变差函数.

事实上，在 $[0,S]$ 上取分点如下：

$x_0=0, x_1=\frac{a}{2}, x_2=a_1, x_3=a_1+\frac{a_2}{2}, x_4=S_2,$

$x_5=S_2+\frac{a_3}{2}, x_6=S_3, x_7=S_3+\frac{a_4}{2},\cdots$

显然 $0<x_1<x_2<\cdots<S$，则

$$V_f(x_0,x_1,\cdots,S)=\left|f\left(\frac{a_1}{2}\right)-f(0)\right|+\left|f(a_1)-f(\frac{a_1}{2})\right|$$

$$+\left|f\left(S_1+\frac{a_2}{2}\right)-f(S_1)\right|+\cdots$$

$$+\left|f(S_k)-f\left(S_{k-1}+\frac{a_k}{2}\right)\right|+|f(S)-f(S_k)|$$

$$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right).$$

由此可知，选择充分大的 k，可以使 $V_f(x_0,x_1,\cdots,x_k,S)$ 任意地大，因而 $V_0^S(f)=+\infty$.

即 $f(x)$ 在 $[0,S]$ 上不是有界变差函数.

下面选择级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，使函数 $f(x)$ 满足给定阶数的李普希兹条件.

设 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$ 是属于函数图形上同一线段上的两点，如果

$$S_{n-1}\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant S_{n-1}+\frac{a_n}{2},$$

$$x_2-x_1\leqslant\frac{a_n}{2}<a_n,$$

那么
$$|y_2-y_1|=k|x_2-x_1|.$$

其中 $k=\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{2}}=\dfrac{2}{na_n}$ 为线段 M_1M_2 的斜率.

因而

$$|y_2-y_1|=\frac{2}{na_n}|x_2-x_1|$$

$$=\frac{2|x_2-x_1|^{1-\alpha}}{na_n}|x_2-x_1|^{\alpha}$$

$$<\frac{2a_n^{1-\alpha}}{na_n}|x_2-x_1|^{\alpha}=\frac{2}{na_n^{\alpha}}|x_2-x_1|^{\alpha}.$$

选取这样的$\{a_n\}$，使$\left\{\frac{2}{na_n^{\alpha}}\right\}$是有界的，在不破坏级数$\sum a_n$收敛性的情况下，这样的级数是可以作出来的. 对此，只要取$a_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$就行了. 那么，对属于函数图形上同一线段上的任二点x_1和x_2就有：

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant 2|x_2-x_1|^{\alpha}.$$

现设x_1和x_2是$[0,S]$上的任两点，不在函数图形上的同一线段上，即

$$x_1\in\left[S_{k-1},S_{k-1}+\frac{a_n}{2}\right],$$

$$x_2\in\left[S_{k-1}+\frac{a_n}{2},S_n\right].$$

这时$k\leqslant n$，如图，通过图形上的点M_2(横坐标为x_2)引水平直线，设它同M_1(横坐标为x_1)所在图形线段的交点为$M'_2(\xi,\eta)$. 易证：

$$|x_2-x_1|>|\xi-x_1|.$$

此外，$f(x_2)=f(\xi)$，因而

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(\xi)-f(x_1)|$$
$$\leqslant 2|\xi-x_1|^{\alpha}<2|x_2-x_1|^{\alpha}.$$

于是，不等式　$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant 2|x_2-x_1|^{\alpha}$

对$[0,S]$上的任两点成立. 即是说函数$f(x)$在$[0,S]$上满足α阶的李普希兹条件.

第六章　平方可积函数

内 容 提 要

本章所介绍的内容只限于测度有限的可测点集 E，以后不再声明.

[**定义 6.1**]　设 $p\geqslant 1$，若 $|f(x)|^p$ 在 E 上可积，则称 $f(x)$ 为 p 幂可积函数. 当 $p=2$ 时，$f(x)$ 称为平方可积函数. 全体 p 幂可积函数的集合记为 $L_p(E)$ 或 L_p.

即　$$L_p(E)=\left\{f\,\middle|\,\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x<+\infty\right\}.$$

注　$L_p(E)$ 中凡是与 $f(x)$ 几乎处处相等的函数都视为同一元素，且记为 f.

[**定义 6.2**]　对于 $f\in L_p$，$g\in L_p$，称

$$\|f\|_p=\left\{\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}$$

为 $f(x)$ 的范数（或模）；称

$$\rho(f,g)=\|f-g\|_p$$

为 f 与 g 的距离. 对 $f\in L_2$，$g\in L_2$，称

$$(f,g)=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

为 f 与 g 的内积.

注　以上定义中 $\|f(x)\|_2=\sqrt{(f,f)}$，当 $p\neq 2$ 时，L_p 中没有内积的概念.

[**定理 6.1**]　几个重要的不等式：

(1) 霍尔得不等式：设 $p>1$，$q>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，对任何 $f\in L_p$，$g\in L_q$，则有

$$\left|\int_E fg\mathrm{d}x\right| \leqslant \left\{\int_E |f|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{\int_E |g|^q\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

(2) 明可夫斯基不等式：设 $f\in L_p, g\in L_p(p\geqslant 1)$，则有

$$\left\{\int_E |f+g|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int_E |f|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_E |g|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

注 1° 当 $p\geqslant 1, q\geqslant 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时，称 p、q 互为相伴数. 并规定，当 $p=1$ 时，$q=+\infty$，当 $q=1$ 时，$p=+\infty$. 对于相伴数 p、q，由于 $\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}=1$，所以，我们常令 $q=\frac{p}{p-1}$，然后用霍尔得不等式，此法在证题中常可使问题简捷明了.

2° 当 $p=q=2$ 时，霍尔得不等式称为许瓦兹不等式，即

$$\left|\int_E fg\mathrm{d}x\right| \leqslant \left\{\int_E |f|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int_E |g|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

当 $p=2$ 时，明可夫斯基不等式称为柯西不等式，即

$$\left\{\int_E |f+g|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left\{\int_E |f|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_E |g|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

3° 上述四个不等式用范数和内积可表示为如下形式.

霍尔得不等式：$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

明可夫斯基不等式：$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

许瓦兹不等式：$|(f,g)| \leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$.

柯西不等式：$\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$.

4° 以上不等式在本章和泛函分析中应用非常广泛. 一般情况下，凡是涉及到两函数之和的积分的有关不等式，都应首先考虑运用明可夫斯基不等式和柯西不等式；凡涉及到两函数乘积的积分的有关不等式，都应先考虑运用霍尔得不等式和许瓦兹不等式. 特别，有时可将一个函数 $f(x)$ 看作 $f(x)$ 与 1 的乘积，或将函数 $f(x)$ 看作 $f(x)-g(x)$ 与 $g(x)$ 的和，再应用以上不等式. 读者应注意在解题中这一技巧的使用.

［定理 6.2］ 范数满足下列范数公理：

(1) $\|f\|_p\geqslant 0$，当且仅当 $f=0$ 时等号成立（正定性）.

(2) $\|af\|_p=|a|\cdot\|f\|_p$,(a 为数) (正齐性).

(3) $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$ (三角不等式).

距离具有下列性质:

(1) $\rho(f,g)\geqslant 0$,当且仅当 $f=g$ 时等号成立.

(2) $\rho(f,g)=\rho(g,f)$.

(3) $\rho(f,g)\leqslant\rho(f,h)+\rho(h,g)$.

注 由于我们在 L_p 中定义了范数和距离,所以,L_p 既成为一个距离空间,又成为一个赋范线性空间,在 L_2 中还定义了内积,所以,L_2 还是一个内积空间.以下我们专门介绍 L_2 空间,且 $mE<+\infty$,当 $p\neq 2$ 时,L_p 空间也有一些与 L_2 空间相同的定义和结论.必须指出,L_2 中凡涉及到有关内积的结论,$L_p(p\neq 2)$ 中当然没有,这是 L_2 空间与一般 L_p 空间的本质区别.

[定义 6.3] 设 $f_n\in L_2(n=1,2,\cdots)$,$f\in L_2$,若

$$\lim_{n\to\infty}\rho(f_n,f)=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_E|f_n-f|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}=0,$$

则称 f_n 平均收敛于 f(或称 f_n 依范数收敛于 f,或 f_n 强收敛于 f,记作 $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$),记为

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f.$$

注 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 除记号不同外,在意义上也有着本质的不同.

[定理 6.3] 设 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=g$,则

(1) $f=g$ (极限的唯一性);

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_2=\|f\|_2$ (范数的连续性);

(3) 对任何 $h\in L_2$,$\lim\limits_{n\to\infty}(f_n,h)=(f,h)$ (内积的连续性);

(4) $f_n(x)\Rightarrow f(x)$ (依测度收敛);

(5) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=u(x)$ a、e 于 E,则 $f(x)=u(x)$ a、e 于 E.

[定义 6.4] 设 $f_n\in L_2(n=1,2,\cdots)$,若存在 $f\in L_2$,使对一切 $g\in L_2$ 有:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n g\mathrm{d}x = \int_E fg\mathrm{d}x. \text{ 即} \lim_{n\to\infty}(f_n,g) = (f,g),$$

则称 f_n 弱收敛于 f，记为 $f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$.

［定义 6.5］ 设$\{f_n\}$是 L_2 中的序列，若对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，使当 $m,n>N$ 时，有 $\rho(f_n,f_m)=\|f_n-f_m\|_2<\varepsilon$，则称$\{f_n\}$为 L_2 的一个基本列（柯西列）. 若某空间中的所有基本列都收敛，则称此空间是完全的（或完备的）.

设 $A\subset L_2$，若对任何 $f\in L_2$，恒有 $g_n\in A(n=1,2,\cdots)$，使$\lim\limits_{n\to\infty}g_n=f$，则称 A 在 L_2 中稠密，如果存在可列的稠密子集，则称 L_2 具有可分性.

设 M 是定义了距离的距离空间，如果对于 M 的任何点 a，恒有 a 的某个邻域 $N(a,\delta)$，使属于 $N(a,\delta)$的任意无穷点集都有聚点，则称空间 M 是局部列紧空间.

［定理 6.4］ L_2 空间的性质：

(1) 设 $f_n\in L_2(n=1,2,\cdots)$，则$\{f_n\}$收敛的充要条件是$\{f_n\}$为基本列. 因此 L_2 是完全空间（或完备空间）.

(2) 对任何 $f\in L_2$，恒有有理系数多项式 $\varphi_n\in L_2(n=1,2,\cdots)$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=f$. 即全体有理系数多项式构成 L_2 的一个可列稠密子集，故 L_2 是可分空间.

(3) L_2 空间是非局部列紧空间.

［定义 6.6］ 设 N 是由 L_2 中的点作成的集合，若对任意 $x\in N$，$y\in N$，$x\neq y$，都有$(x,y)=0$，则称 N 为 L_2 的一直交系统. 若 N 中的每一 x 都有 $\|x\|_2=1$，则称 N 为 L_2 的一个正规系统（就范系统或标准系统）. 若 N 既是直交系统，又是正规系统，则称 N 为 L_2 的正规直交系统.

设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\cdots$ 是 L_2 的一个正规直交系统，$X\in L_2$，则 $x_n=(X,\varphi_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$称为 X 对坐标系统$\{\varphi_n\}$而言的坐标，即$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$.

若只有几乎处处为零的函数对$\{\varphi_n\}$的坐标才全为 0，则称$\{\varphi_n\}$

为完全系统.

[定理 6.5] 设

(1) $\{\varphi_n\}$为正规直交系统(不一定完全),

(2) $X\in L_2, x_n=(X,\varphi_n)(n=1,2,\cdots)$,则

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(X,\varphi_n)|^2\leqslant\|X\|_2^2$ (贝塞尔不等式);

(ii) 若$\{\varphi_n\}$是完全的,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(X,\varphi_n)|^2=\|X\|_2^2$$ (巴塞弗公式或封闭方程式).

[定理 6.6] L_2 的任意完全系统都恰有可数个元素.

[定义 6.7] 设$\{\varphi_n\}$是 L_2 的正规直交系统,若它的所有线性组合作成的集合在 L_2 上处处稠密,则称$\{\varphi_n\}$为 L_2 的封闭系统.

[定理 6.7] 下列事实是等价的:

(1) $\{\varphi_n\}$是完全系统;

(2) $\{\varphi_n\}$是封闭系统;

(3) 对$\forall X\in L_2$,封闭方程式 $\|X\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(X,\varphi_n)|^2$ 成立.

[定理 6.8] 设$\{\varphi_n\}$为一完全正规直交系统,$\{\omega_n\}$为另一正规直交系统,则$\{\omega_n\}$为完全系统的充要条件是对每一 $\varphi_i\in\{\varphi_n\}$,均有

$$\|\varphi_i\|_2^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(\varphi_i,\omega_n)|^2.$$

问 题 解 答

一、几个重要不等式的应用

[6.1] 设 $f\in L_p, g\in L_p, a, b$ 为数,则 $af+bg\in L_p$,且 fg 可积.

证 因为 $f\in L_p, g\in L_p$,所以,

$$\left\{\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty,\ \left\{\int_E|g|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

故由柯西不等式有

$$\left\{\int_E |af+bg|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left\{\int_E |af|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_E |bg|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= |a| \cdot \left\{\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} + |b| \cdot \left\{\int_E |g|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

即
$$af+bg \in L_p.$$

又由许瓦兹不等式有

$$\left|\int_E fg\mathrm{d}x\right| \leqslant \left\{\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{\int_E |g|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

即 fg 可积.

[6.2] 设 $f \in L_2$,证明

$$\int_a^b |f| \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b f^2 \mathrm{d}x}.$$

证 由许瓦兹不等式有

$$\int_a^b |f| \mathrm{d}x = \int_a^b |f| \cdot 1\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left\{\int_a^b |f|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int_a^b 1^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{b-a} \cdot \left\{\int_a^b |f|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b f^2 \mathrm{d}x}.$$

[6.3] 设 $0 < mE < +\infty$,令

$$N_p(f) = \left\{\frac{1}{mE}\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}, 1 \leqslant p < +\infty,$$

试证,当 $p_1 < p_2$ 时有 $N_{p_1}(f) \leqslant N_{p_2}(f)$.

证 由霍尔得不等式有

$$N_{p_1}(f) = \left\{\frac{1}{mE}\int_E |f|^{p_1} \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= \left(\frac{1}{mE}\right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \left\{\int_E |f|^{p_1} \cdot 1 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{mE}\right)^{\frac{1}{p_1}} \left\{\left[\int_E |f|^{p_1 \cdot \frac{p_2}{p_1}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot \left[\int_E 1^{\frac{p_2}{p_2-p_1}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{p_2-p_1}{p_2}}\right\}^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= \left(\frac{1}{mE}\right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot (mE)^{\frac{p_2-p_1}{p_2} \cdot \frac{1}{p_1}} \cdot \left\{\int_E |f|^{p_2} \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p_2}}$$

$$= \left(\frac{1}{mE}\right)^{\frac{1}{p_2}} \left\{\int_E |f|^{p_2} \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p_2}}$$

$$= \left\{\frac{1}{mE}\int_E |f|^{p_2} \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p_2}} = N_{p_2}(f).$$

[6.4] 设 $f(x)$,$g(x)$是$[a,b]$上的非负可测函数,且 $\|g\|_1 = 1$,试证,当 $1 < p < +\infty$时,有

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right\}^p \leqslant \int_a^b f^p(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证 若 $f(x)$与 $g(x)$有一个的积分值为$+\infty$,结论显然成立.

下设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < +\infty$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x < +\infty$, 即 $f(x)$,$g(x)$均为可积函数.

则
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x < +\infty.$$

注意到 $\|g\|_1 = \int_a^b g\mathrm{d}x = 1$, 由霍尔得不等式有

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right\}^p = \left\{\int_a^b [f^p(x)g(x)]^{\frac{1}{p}} \cdot g^{\frac{p-1}{p}} \mathrm{d}x\right\}^p$$

$$\leqslant \left\{\left[\int_a^b (f^p g)^{\frac{1}{p}\cdot p}\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_a^b g^{\frac{p-1}{p}\cdot\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x\right]^{\frac{p-1}{p}}\right\}^p$$

$$= \int_a^b f^p g\mathrm{d}x \cdot \left(\int_a^b g\mathrm{d}x\right)^{p-1}$$

$$= \int_a^b f^p \cdot g\mathrm{d}x \cdot \|g\|_1^{p-1}$$

$$= \int_a^b f^p g\mathrm{d}x.$$

[6.5] 设 $f \in L_2(0,\pi)$,试证下面两个不等式是不相容的.

(1) $\int_0^\pi [f - \sin x]^2 dx \leqslant \frac{4}{9}$,

(2) $\int_0^\pi [f - \cos x]^2 dx \leqslant \frac{1}{9}$.

证 由霍尔得不等式

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} &= \left\{\int_0^\pi (\sin x - \cos x)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{\int_0^\pi [(\sin x - f) + (f - \cos x)]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left[\int_0^\pi (\sin x - f)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^\pi (f(x) - \cos x)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

若(1),(2)两式同时成立,则有

$$\sqrt{\pi} \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$

矛盾,所以(1),(2)是不相容的.

[6.6] 设 p,q,r 为满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$ 的正数,则对任何可测函数 $f\in L_p, g\in L_q, h\in L_r$ 有

$$\int_E |fgh| dx \leqslant \| f \|_p \cdot \| g \|_q \cdot \| h \|_r$$

(推广的霍尔得不等式).

证 ∵ $f\in L_p, g\in L_q, h\in L_r$,

∴ $$g^{\frac{p}{p-1}} \in L_{\frac{p-1}{p}q}, \quad h^{\frac{p}{p-1}} \in L_{\frac{p-1}{p}r}$$

又 $$\frac{1}{\frac{p-1}{p}\cdot q} + \frac{1}{\frac{p-1}{p}\cdot r} = \frac{p}{p-1}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) = \frac{p}{p-1}\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1.$$

由霍尔得不等式得

$$g^{\frac{p}{p-1}} \cdot h^{\frac{p}{p-1}} \in L_1, \text{即 } gh \in L_{\frac{p}{p-1}}$$

且有

$$\int_E |gh|^{\frac{p}{p-1}} dx \leqslant \| g^{\frac{p}{p-1}} \|_{\frac{p-1}{p}q} \cdot \| h^{\frac{p}{p-1}} \|_{\frac{p-1}{p}r}$$

$$= \left\{\int_E |g|^q \mathrm{d}x\right\}^{\frac{p}{(p-1)q}} \cdot \left\{\int_E |h|^r \mathrm{d}x\right\}^{\frac{p}{(p-1)r}}$$
$$= \|g\|_q^{\frac{p}{p-1}} \cdot \|h\|_r^{\frac{p}{p-1}}.$$

由 $gh \in L_{\frac{p}{p-1}}, f \in L_p, \frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{p-1}} = 1$ 及霍尔得不等式得 $fgh \in L_1$，

且 $$\int_E |fgh| \mathrm{d}x \leqslant \|f\|_p \cdot \|gh\|_{\frac{p}{p-1}}$$
$$= \|f\|_p \cdot \left\{\int_E |gh|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}x\right\}^{\frac{p-1}{p}}$$
$$\leqslant \|f\|_p \cdot \{\|g\|_q^{\frac{p}{p-1}} \cdot \|h\|_r^{\frac{p}{p-1}}\}^{\frac{p-1}{p}}$$
$$= \|f\|_p \cdot \|g\|_q \cdot \|h\|_r.$$

[6.7] 设 $f \in L_p(E)$，e 为 E 的可测子集，则
$$\left\{\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int_e |f|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_{E-e} |f|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

证 令
$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in e \\ 0. & x \in E - e, \end{cases}$$
$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in e \\ f(x). & x \in E - e. \end{cases}$$

则 $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

由明可夫斯基不等式得
$$\left\{\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\int_E |f_1 + f_2|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \left\{\int_E |f_1|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_E |f_2|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left\{\int_e |f_1|^p \mathrm{d}x + \int_{E-e} |f_1|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \left\{\int_e |f_2|^p \mathrm{d}x + \int_{E-e} |f_2|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left\{\int_e |f_1|^p \mathrm{d}x + 0\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{0 + \int_{E-e} |f_2|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left\{\int_e |f|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_{E-e} |f|^p \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}. \quad \text{证毕}$$

[6.8] 设 $f\in L_2, g\in L_2, f\neq 0, g\neq 0$，证明许瓦兹不等式

$$|(f,g)|\leqslant \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

中等号成立的充要条件是存在数 λ，使 $f=\lambda g$.

证　充分性　若有数 λ 使 $f=\lambda g$，则

$$\begin{aligned}|(f,g)| &= |(\lambda g,g)| = |\lambda|\cdot|(g,g)| = |\lambda|\cdot\|g\|_2^2\\ &= |\lambda|\cdot\|g\|_2\cdot\|g\|_2 = \|\lambda g\|_2\cdot\|g\|_2\\ &= \|f\|_2\cdot\|g\|_2\end{aligned}$$

即许瓦兹不等式中等号成立.

必要性　设 $|(f,g)|=\|f\|_2\cdot\|g\|_2$，

则
$$\|f\|_2^2-\frac{|(f,g)|^2}{\|g\|_2^2}=0 \tag{*}$$

对任何数 λ，由内积定义知

$$\begin{aligned}\|f-\lambda g\|_2^2 &= (f-\lambda g, f-\lambda g) = \int_E |f-\lambda g|^2 \mathrm{d}x\\ &= \int_E (f^2 - 2\lambda fg + \lambda^2 g^2)\mathrm{d}x\\ &= \int_E f^2 \mathrm{d}x - 2\lambda\int_E fg\mathrm{d}x + \lambda^2\int_E g^2\mathrm{d}x\\ &= (f,f) - 2\lambda(f,g) + \lambda^2(g,g),\end{aligned}$$

由 λ 的任意性，取 $\lambda=\dfrac{(f,g)}{(g,g)}$，则有

$$\begin{aligned}\|f-\lambda g\|_2^2 &= (f,f)-2\frac{(f,g)}{(g,g)}\cdot(f,g)+\frac{(f,g)^2}{(g,g)^2}\cdot(g,g)\\ &= (f,f)-\frac{(f,g)^2}{(g,g)} = \|f\|_2^2-\frac{|(f,g)|^2}{(g,g)}.\end{aligned}$$

由(*)式得

$$\|f-\lambda g\|_2^2=0,$$

从而
$$f-\lambda g=0.$$

即
$$f=\lambda g.$$

[6.9] 设 $f,g\in L_2, g\neq 0$，证明柯西不等式

$$\|f+g\|_2\leqslant \|f\|_2+\|g\|_2$$

中等号成立的充要条件是存在数 $\lambda \geqslant 0$，使 $f=\lambda g$.

证 充分性 设有数 $\lambda \geqslant 0$，使 $f=\lambda g$.

由范数的定义知

$$\|f+g\|_2=\|\lambda g+g\|=\left\{\int_E(\lambda g+g)^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{(\lambda+1)^2\int_E g^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}=(\lambda+1)\cdot\|g\|_2$$

$$=\lambda\|g\|_2+\|g\|_2=\|\lambda g\|_2+\|g\|_2$$

$$=\|f\|_2+\|g\|_2.$$

即柯西不等式中等号成立.

必要性 设 $\|f+g\|_2=\|f\|_2+\|g\|_2$，则

$$\|f+g\|_2^2=\int_E(f+g)^2\mathrm{d}x=\int_E f^2\mathrm{d}x+2\int_E f\cdot g\mathrm{d}x+\int_E g^2\mathrm{d}x$$

$$=\|f\|_2^2+2(f,g)+\|g\|_2^2$$

$$\leqslant\|f\|_2^2+2|(f,g)|+\|g\|_2^2$$

$$\leqslant\|f\|_2^2+2\|f\|_2\cdot\|g\|_2+\|g\|_2^2$$

$$=(\|f\|_2+\|g\|_2)^2 \qquad (*)$$

由题设知

$$\|f+g\|_2^2=(\|f\|_2+\|g\|_2)^2,$$

从而(*)式中的等号全成立，比较便得

$$|(f,g)|=\|f\|_2\cdot\|g\|_2=(f,g).$$

由 $|(f,g)|=\|f\|_2\cdot\|g\|_2$，及上题知，存在数

$$\lambda=\frac{(f,g)}{(g,g)},$$

使

$$f=\lambda g.$$

再由 $(f,g)=|(f,g)|$ 知 $(f,g)\geqslant 0$.

从而

$$\lambda=\frac{(f,g)}{(g,g)}\geqslant 0.$$

[6.10] 设 $f\in L_p(\mathrm{R}^1)$ $(1<p<+\infty)$，令

$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 试证：$F(x+h)-F(x)=0(|h|^{\frac{1}{q}})$ $(h\to 0)$，(q

为 p 的相伴数).

证 由题设 $f\in L_p(\mathrm{R}^1)$,即

$$\int_{\mathrm{R}^1}|f|^p\mathrm{d}x<+\infty,$$

从而,$|f|^p<+\infty$ $a.e.$ 于 R^1

故

$$\begin{aligned}|F(x+h)-F(x)| &= \left|\int_0^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_x^{x+h}|f(t)|\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant\left|\left\{\int_x^{x+h}|f(t)|^p\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int_x^{x+h}1^q\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{q}}\right| \\ &= |h|^{\frac{1}{q}}\cdot\left|\left\{\int_x^{x+h}|f(t)|^p\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{p}}\right|.\end{aligned}$$

由于 $$\int_x^{x+h}|f(t)|^p\mathrm{d}t\to 0\quad(h\to 0),$$

故 $$\frac{F(x+h)-F(x)}{|h|^{1/q}}\to 0\quad(h\to 0)$$

即 $$F(x+h)-F(x)=0(|h|^{\frac{1}{q}}).$$

[6.11] 设 $1<q<p$, $mE<+\infty$, $f\in L_p$, $f_k\in L_p(k=1,2,\cdots)$,若 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$,试证

$$\lim_{k\to 0}\|f_k-f\|_q=0.$$

证 由于 $1<q<p$,且 $\dfrac{q}{p}+\dfrac{p-q}{p}=1$,由霍尔得不等式得

$$\begin{aligned}\|f_k-f\|_q^q &= \int_E|f_k-f|^q\mathrm{d}x \\ &\leqslant\left\{\int_E|f_k-f|^{q\cdot\frac{p}{q}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{q}{p}}\cdot\left\{\int_E 1^{\frac{p}{p-q}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{p-q}{p}} \\ &= \left\{\int_E|f_k-f|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{q}{p}}\cdot(mE)^{\frac{p-q}{p}} \\ &= \left\{\left[\int_E|f_k-f|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\right\}^q\cdot(mE)^{\frac{p-q}{p}}.\end{aligned}$$

从而

$$\| f_k - f \|_q \leqslant \left\{ \int_E | f_k - f |^p \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot (mE)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$

$$= \| f_k - f \|_p \cdot (mE)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

由于 $\lim\limits_{k\to\infty} \| f_k - f \|_p = 0, mE < +\infty.$

所以 $$\lim_{k\to\infty} \| f_k - f \|_q = 0.$$

［6.12］ 设 $1 < p < +\infty, f, f_k \in L_p(E) \quad (k=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), \sup_{1\leqslant k<\infty} \| f_k \|_p \leqslant M.$$

试证对任意的 $g \in L_q(E)$（q 为 p 的相伴数）有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x) g(x) \mathrm{d}x = \int_E f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

证 $$\left| \int_E f_k(x) g(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_E | f_k(x) \cdot g(x) | \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left\{ \int_E | f_k(x) |^p \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_E | g(x) |^q \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \| f_k \|_p \cdot \| g \|_q \leqslant M \cdot \| g \|_q,$$

由于 $f_k \in L_p(E), g \in L_q(E)$，从而 $f_k g \in L_1(E)$，且 $|g(x)|^q$ 在 E 上几乎处处有界，不妨设在整个 E 上，有 $|g(x)|^q \leqslant N^q$，即 $|g(x)| \leqslant N$. N 为某正数．而 $f_k(x) \to f(x) (k\to\infty)$，故

$$| f_k(x) g(x) - f(x) g(x) | = | g(x) | \cdot | f_k(x) - f(x) |$$

$$\leqslant N \cdot | f_k - f | \to 0 \quad (k\to\infty)$$

从而 $$f_k(x) g(x) \to f(x) g(x) \quad (k\to\infty).$$

故 $\{f_k(x) g(x)\}$ 满足勒贝格控制收敛定理的条件，

故 $$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k g \mathrm{d}x = \int_E f g \mathrm{d}x.$$

二、L_2 空间点列的收敛性

［6.13］ 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots$，都属于 L_2，并且

$$| f_n(x) | \leqslant f(x) \ a.e \text{ 于 } E (n=1,2,\cdots),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \ a.e \text{ 于 } E,$$

则 $$\lim_{n\to\infty} f_n = g.$$

证 $\because \quad | f_n | \leqslant f(x) \ a.e$ 于 $E(n=1,2,\cdots)$，

又 $$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=g(x)\ a.e\ 于\ E,$$

∴ $$|g(x)|\leqslant f(x)\ a.e\ 于\ E.$$

故 $$(f_n(x)-g(x))^2=f_n^2(x)-2f_n(x)g(x)+g^2(x)$$
$$\leqslant 4f^2(x)\ a.e\ 于\ E.$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n(x)-g(x))=0\ a.e$ 于 E 知,

$$(f_n(x)-g(x))^2 \Longrightarrow 0.$$

故由勒贝格控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (f_n(x)-g(x))^2\mathrm{d}x=0,$$

即 $$\|f_n(x)-g(x)\|_2^2\to 0\quad(n\to\infty).$$

∴ $$\|f_n-g\|_2\to 0\quad(n\to\infty)$$

亦即 $$\lim_{n\to\infty} f_n=g.$$

[6.14] 设 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n=g$,求证

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,g_n)=(f,g).$$

证 因 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$,故 f_n 有界,即存在常数 k,使

$$\|f_n\|_2\leqslant k\quad(n=1,2,\cdots).$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n=g$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n-g\|_2=0$.

而

$$\begin{aligned}|(f_n,g_n)-(f,g)|&=|(f_n,g_n)-(f_n,g)+(f_n,g)-(f,g)|\\&=|(f_n,g_n-g)+(f_n-f,g)|\\&\leqslant|(f_n,g_n-g)|+|(f_n-f,g)|\\&\leqslant\|f_n\|_2\cdot\|g_n-g\|_2+\|f_n-f\|_2\cdot\|g\|_2\\&\leqslant k\cdot\|g_n-g\|_2+\|g\|_2\cdot\|f_n-f\|_2\to 0\\&\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}(f_n,g_n)=(f,g).$$

[6.15] 设 L_2^k 是 $[a,b]$ 上所有满足条件

$$|f(x)|\leqslant k\ a.e\ 于[a,b]$$

的平方可积函数作成的集合,则 L_2^k 是 L_2 的一个闭子集,并且 L_2^k

中序列$\{f_n(x)\}$平均收敛于$f(x)$的充要条件是$f_n(x)\Rightarrow f(x)$.

证 先证L_2^k是L_2的一个闭子集．即证:若g是L_2^k的一个聚点,则$g\in L_2^k$,

由聚点定义知,在L_2^k中有一列函数$\{f_n(x)\}$,使

$$\| f_n-g \|_2\to 0 \quad (n\to\infty).$$

则 $f_n(x)\Rightarrow g(x)$(注:见下面"必要性"的证明),故由黎斯定理,在L_2中必有子列$\{f_{n_k}(x)\}$,使

$$f_{n_k}(x)\to g(x)\ a.e\ 于[a,b] \quad (k\to\infty).$$

由于

$$|f_{n_k}(x)|\leqslant k\ a.e\ 于[a,b].$$

取极限便得

$$|g(x)|\leqslant k\ a.e\ 于[a,b].$$

此即

$$g\in L_2^k.$$

再证后一结论.

必要性 设L_2^k中的序列$\{f_n(x)\}$平均收敛于$f(x)$,

即

$$\| f_n-f \|_2\to 0 \quad (n\to\infty),$$

亦即

$$\int_E |f_n-f|^2 \mathrm{d}x\to 0 \quad (n\to\infty).$$

对$\forall\ \sigma>0$,令$A_n(\sigma)=E[x\mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]$

则

$$\int_E |f_n(x)-f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \int_{A_n(\sigma)} |f_n(x)-f(x)|^2 \mathrm{d}x$$

$$\geqslant\sigma^2\cdot mA_n(\sigma).$$

因

$$\int_E |f_n(x)-f(x)|^2 \mathrm{d}x\to 0 \quad (n\to\infty),$$

所以

$$\sigma^2 m(A_n(\sigma))\to 0 \quad (n\to\infty).$$

由于$\sigma^2>0$,所以,$mA_n(\sigma)\to 0(n\to\infty)$. 即对$\forall\ \sigma>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} mE[x\mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]=0.$$

故 $$f_n \Rightarrow f.$$

充分性　设 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，由黎斯定理，有子列 $\{f_{n_k}\}$，使

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad a.e\ 于 [a,b].$$

由于 $f_n(x) \in L_2^k$，故 $f_{n_k}(x) \in L_2$，且 $|f_{n_k}(x)| \leqslant k$.

取极限便知 $|f(x)| \leqslant k$，即 $f(x) \in L_2^k$.

对 $\forall\ \sigma > 0$，令

$$E_n(\sigma) = \{x \mid |f_n - f| \geqslant \sigma\},$$

$$B_n(\sigma) = [a,b] - E_n(\sigma) = \{x \mid |f_n - f| < \sigma\}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f_n - f|^2 \mathrm{d}x &= \int_{E_n(\sigma)} |f_n - f|^2 \mathrm{d}x + \int_{B_n(\sigma)} |f_n - f|^2 \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{E_n(\sigma)} |f_n - f|^2 \mathrm{d}x + \int_a^b \sigma^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{E_n(\sigma)} |f_n - f|^2 \mathrm{d}x + \sigma^2 (b-a) \qquad (*)
\end{aligned}$$

而 $f_n(x), f(x) \in L_2$，故 $|f_n - f|^2$ 可积，

从而，由积分的绝对连续性，对 $\forall\ \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使当 $me < \delta$ 时，恒有

$$\int_e |f_n - f|^2 \mathrm{d}x < \varepsilon/2. \tag{1}$$

由于 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，所以

$$\lim_{n\to\infty} mE_n(\sigma) = 0,$$

故对上述 $\delta > 0$，存在 N，当 $n \geqslant N$ 时，有

$$mE_n(\sigma) < \delta,$$

于是，当 $n \geqslant N$ 时，由(1)知

$$\int_{E_n(\sigma)} |f_n - f|^2 \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

现选取 σ，使 $\sigma^2(b-a) < \varepsilon/2$，从而当 $n \geqslant N$ 时，由 $(*)$ 式便有

$$\int_a^b |f_n - f|^2 \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_2=0.$$

故 $\{f_n(x)\}$平均收敛于$f(x)$.

[6.16] 设$mE<+\infty$, $p>1$, $f_n\in L_p(n=1,2,\cdots)$，若在L_p中有$f_n\xrightarrow{强}f$, $f\in L_p$，则当$1\leqslant r<p$时，在L_r中有$f_n\xrightarrow{强}f$.

证 令

$$A_n=E[x\,|\,|f_n-f|\geqslant 1].$$
$$B_n=E-A_n=E[x\,|\,|f_n-f|<1].$$

于是

$$\begin{aligned}\int_E|f_n-f|^r\mathrm{d}x&=\int_{A_n}|f_n-f|^r\mathrm{d}x+\int_{B_n}|f_n-f|^r\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{A_n}|f_n-f|^r\mathrm{d}x+\int_{B_n}|f_n-f|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_E|f_n-f|^p\mathrm{d}x+\left\{\int_{B_n}|f_n-f|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{B_n}1^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x\right\}^{\frac{p-1}{p}}\\&\leqslant\|f_n-f\|_p^p+\|f_n-f\|_p\cdot(mB_n)^{\frac{p-1}{p}}.\end{aligned}$$

由于在L_p中$f_n\xrightarrow{强}f$，即$\|f_n-f\|_p\to 0(n\to\infty)$，所以

$$\int_E|f_n-f|^p\mathrm{d}x\to 0\quad(n\to\infty).$$

亦即 $$\|f_n-f\|_p^p\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以 $$\int_E|f_n-f|^r\mathrm{d}x\to 0\quad(n\to\infty).$$

即在L_r中，$f_n\xrightarrow{强}f$.

[6.17] 证明，设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f_n, f\in L_p$, $g_n, g\in L_q(n=1,2,\cdots)$，且

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f,\qquad\lim_{n\to\infty}g_n=g,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_ng_n\mathrm{d}x=\int_E fg\mathrm{d}x.$$

证 因在L_p中，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，即对$1=\varepsilon>0$，有自然数$N$，当$n\geqslant$

N 时，便有 $\|f_n-f\|_p<\varepsilon=1$，所以当 $n\geqslant N$ 时有

$$\|f_n\|_p=\|f_n-f+f\|_p$$
$$\leqslant\|f_n-f\|_p+\|f\|_p<1+\|f\|_p.$$

取

$$k=\max\{\|f_1\|_p,\|f_2\|_p,\cdots,\|f_{N-1}\|_p,\|f\|+1\}$$

则对一切 n，都有 $\|f_n\|_p\leqslant k$.

同理，由 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=g$，且 $g\in L_q$ 知，对一切 n，存在 $L>0$，使 $\|g_n\|_q\leqslant L$，$\|g\|_q\leqslant L$.

于是

$$\left|\int_E f_ng_n\mathrm{d}x-\int_E fg\mathrm{d}x\right|=\left|\int_E(f_ng_n-fg)\mathrm{d}x\right|$$
$$=\left|\int_E(f_ng_n-f_ng+f_ng-fg)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\int_E|f_n|\cdot|g_n-g|\mathrm{d}x+\int_E|g|\cdot|f_n-f|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\left\{\int_E|f_n|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int_E|g_n-g|^q\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left\{\int_E|f_n-f|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int_E|g|^q\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$=\|f_n\|_p\cdot\|g_n-g\|_q+\|f_n-f\|_p\cdot\|g\|_q$$
$$\leqslant k\|g_n-g\|_q+L\|f_n-f\|_p\to 0\quad(n\to\infty),$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_ng_n\mathrm{d}x=\int_E fg\mathrm{d}x.$$

[6.18] 不利用黎斯定理证明：若 $\{f_n(x)\}$ 平均收敛于 $f(x)$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)$ $a.e$ 于 E，则 $f(x)=g(x)$ $a.e$ 于 E.

证 因 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x=0$，故对 $\varepsilon_i=\dfrac{1}{2^i}$，必有自然数 n_i，使

$$\int_E|f_{n_i}(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x<\frac{1}{2^i}\quad(i=1,2,\cdots).$$

而且可以要求 $n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$，这是完全可以办到的.

因此，级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_E |f_{n_i}(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1<+\infty.$$

由于 $|f_{n_i}(x)-f(x)|^2$ 非负可测，由勒贝格基本定理有

$$\int_E\sum_{i=1}^{\infty}[f_{n_i}(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\int_E[f_{n_i}(x)-f(x)]^2\mathrm{d}x<+\infty.$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}[f_{n_i}(x)-f(x)]^2$ 为可积函数，则必在 E 上几乎处处有限. 且在 E 上几乎处处收敛.

从而 $$f_{n_i}(x)\to f(x)\ a.e\text{ 于 }E$$

又 $f_n(x)\to g(x)\ a.e$ 于 E，更有 $f_{n_i}(x)\to g(x)\ a.e$ 于 E，由极限的唯一性得 $f(x)=g(x)\ a.e$ 于 E.

[6.19] 试说明：在 L_2 中一般收敛（或几乎处处收敛）$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，平均收敛或强收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，弱收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n,g)=(f,g)$，依测度收敛 $f_n\Rightarrow f$ 的关系.

解 (i) $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$，必有 $f_n\xrightarrow{\text{弱}}f$，反之不一定.

(ii) 强收敛与一般收敛(或几乎处处收敛)互不蕴含.

(iii) $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$，必有 $f_n\Rightarrow f$，反之不一定.

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，必有 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，反之不一定.

(v) $f_n\xrightarrow{\text{弱}}f$，不一定有 $f_n\Rightarrow f$，但 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，且 $|f_n|\leqslant M$，则必有 $f_n\xrightarrow{\text{弱}}f$.

(vi) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，且 $|f_n|\leqslant k$，则必有 $f_n\xrightarrow{\text{弱}}f$，反之不一定.

下面我们分别证明之.

(i) 设 $\{f_n\}$ 在 L_2 中有 $f_n\xrightarrow{\text{强}}f$，即有

$$\|f_n-f\|_2\to 0\quad(n\to\infty),$$

则对$\forall\ g\in L_2$，

$$\left|\int_E f_n g\mathrm{d}x-\int_E fg\mathrm{d}x\right|=\left|\int_E (f_n-f)g\mathrm{d}x\right|$$

$$=|(f_n-f,g)|\leqslant\|f_n-f\|_2\cdot\|g\|_2\to 0\quad(n\to\infty).$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n g\mathrm{d}x=\int_E fg\mathrm{d}x.$$

故
$$f_n\xrightarrow{\text{弱}}f.$$

但弱收敛不一定推出强收敛.

例如　$f_n(x)=\sin nx$，在$L_2(0,\pi)$中弱收敛于0，

事实上，根据黎曼-勒贝格定理知，对任何可积函数g都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi g(x)\sin nx\mathrm{d}x=0,\tag{$*$}$$

从而对L_2中的g更有($*$)式成立.

即有
$$f_n\xrightarrow{\text{弱}}0.$$

但f_n根本不是强收敛序列.

事实上，对任何$m\neq n,m,n\geqslant 1$，由于

$$\int_0^\pi \sin mx\cdot\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(m\neq n),$$

故
$$\left\{\int_0^\pi(\sin nx-\sin mx)^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\int_0^\pi\sin^2 nx\mathrm{d}x+\int_0^\pi\sin^2 mx\mathrm{d}x-2\int_0^\pi\sin nx\cdot\sin mx\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|f_n-f_m\|_2=\sqrt{\pi}.$$

所以　$f_n\not\to 0.$

(ii) 强收敛与一般收敛(几乎处处收敛)互不蕴含.

例1　设$f(x)\equiv 0,x\in[0,1]$

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ n, & 0<x<\dfrac{1}{n}\\ 0, & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

显然 $$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

而把 f_n, f 看作 L_2 中的元素时，

$$\rho(f_n,f) = \|f_n - f\|_2 = \left\{\int_0^1 |f_n - f|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{n} \to +\infty \quad (n\to\infty)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \neq f.$

即一般收敛不能推出强收敛.

反之，强收敛也不能推出一般收敛(或几乎处处收敛).

例 2 设$\{f_n(x)\}$是如下一串函数，$E=[0,1]$.

$$f_1(x)=\begin{cases}1, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ 0. x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases}0, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ 1, x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}1, x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\\ 0. x\in\left(\frac{1}{3},1\right]\end{cases} \qquad f_4(x)=\begin{cases}1, x\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\\ 0. x\in E-\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\end{cases}$$

$$f_5(x)=\begin{cases}1, x\in\left[\frac{2}{3},1\right]\\ 0. x\in\left[0,\frac{2}{3}\right)\end{cases} \qquad f_6(x)=\begin{cases}1, x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\\ 0. x\in\left(\frac{1}{4},1\right]\end{cases}$$

$$f_7(x)=\begin{cases}1, x\in\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right]\\ 0. x\in E-\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right]\end{cases} \qquad f_8(x)=\begin{cases}1, x\in\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right]\\ 0. x\in E-\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right]\end{cases}$$

$$f_9(x)=\begin{cases}1, x\in\left[\frac{3}{4},1\right]\\ 0. x\in\left[0,\frac{3}{4}\right)\end{cases} \qquad f_{10}(x)=\begin{cases}1, x\in\left[0,\frac{1}{5}\right]\\ 0. x\in\left(\frac{1}{5},1\right]\end{cases}$$

…… ……

取 $f(x)\equiv 0$，则

$$\|f_n - f\|_2 = \rho(f_n,f) = \left\{\int_0^1 |f_n(x)|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

即 $$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

而 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处不收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)$.

(iii) 若 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$，即 $\| f_n - f \|_2 \to 0 \quad (n\to\infty)$，则

$$\int_E |f_n - f|^2 \mathrm{d}x \to 0 \quad (n \to \infty).$$

对 $\forall\ \sigma > 0$，令

$$A_n(\sigma) = E[x \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma],$$

则 $$\int_E |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \int_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \geqslant \sigma^2 \cdot mA_n(\sigma).$$

因 $$\int_E |f_n(x) - f(x)|^2 \mathrm{d}x \to 0 \quad (n \to \infty).$$

所以 $$\sigma^2 \cdot mA_n(\sigma) \to 0 \quad (n\to\infty).$$

又由于 $\sigma^2 > 0$，所以，$mA_n(\sigma) \to 0 \quad (n\to\infty)$. 即对 $\forall\ \sigma > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} mE[x \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma] = 0.$$

故 $$f_n \Rightarrow f.$$

下证由 $f_n \Rightarrow f$ 推不出 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$.

反证法　设 $f_n \Rightarrow f$ 时，有 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$.

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，必有 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，所以，可由 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 推出 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$，与(ii)矛盾. 故由 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ 不能推出 $f_n \xrightarrow{\text{强}} f$.

(iv) 一般收敛(或几乎处处收敛)必有 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$. 反之不然.

由勒贝格定理，若 $|f_n(x)| < +\infty$，$a.e$ 于 E，$\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，$mE < +\infty$，当 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $a.e$ 于 E 时，必有 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

反之不成立，如(ii)中的例 2，$f_n(x) \Rightarrow f(x) = 0$，但 $f_n(x)$ 处处不收敛 0.

(v) 设 $f_n \xrightarrow{弱} f$，则 $f_n \Rightarrow f$ 不一定成立.

例如　取 $E=[0,\pi]$，$f_n(x)=\sin nx$，$f(x)\equiv 0$. 由(i)的例知，$f_n \xrightarrow{弱} f=0$，但

$$mE\left[x \mid |f_n - f| \geqslant \frac{1}{2}\right] = mE\left[x \mid |f_n| \geqslant \frac{1}{2}\right]$$

$$= mE\left[x \mid \sin nx \geqslant \frac{1}{2}\right]$$

$$= m\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] = \frac{2}{3}\pi \not\to 0.$$

即
$$f_n(x) \not\Rightarrow 0.$$

反之，若 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，$|f_n| \leqslant M$，则 $f_n \xrightarrow{弱} f$.

为此只证 $\{f_n(x)g(x)\}$ 满足维它利定理的条件即可.

事实上，因 $f_n \in L_2$，故 $\{f_n(x)\}$ 为可测函数列，又因 $f_n \Rightarrow f$，由黎斯定理知，存在子列 $\{f_{n_k}(x)\}$ 使

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)\ a.e\ 于\ E.$$

故　$f(x)$ 在 E 上可测.

由法都定理知

$$\int_E f^2(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} f_{n_k}^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_{n_k}^2(x)\mathrm{d}x \leqslant M^2 \cdot mE < +\infty.$$

故
$$f \in L_2.$$

从而，$\{f_n(x)f(x)\}$ 是 L_2 的可积函数列.　　(a)

又对 $\forall\ g \in L_2$，由积分的绝对连续性知，对 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，对可测子集 $A \subset E$，当 $mA < \delta$ 时，有

$$\int_A g^2(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon^2}{M^2}.$$

由柯西不等式

$$\left|\int_A f_n g\mathrm{d}x\right| \leqslant \left\{\int_A f_n^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int_A g^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left\{\int_E f_n^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\varepsilon}{M}$$

$$\leqslant \left\{\int_E M^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\varepsilon}{M} = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} \cdot mE$$

$$= \varepsilon \cdot mE = \varepsilon_1$$

所以，$\{f_n(x)g(x)\}$的积分具有等度的绝对连续性. (b)

又因 $g \in L_2 \subset L(E)$，所以，$g(x)$为几乎处处有限的可测函数，即存在 $L>0$，使 $|g(x)| \leqslant L$ $a.e$ 于 E.

设 $E_1 = E[x \mid |f(x)| \leqslant L]$，$E_2 = [x \mid |f(x)| = \infty]$，则 $mE_2 = 0$，且 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$，所以

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant mE[x \mid |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geqslant \sigma] \\
&= mE_1[x \mid |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geqslant \sigma] \\
&\quad + mE_2[x \mid |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geqslant \sigma] \\
&\leqslant mE_1[x \mid |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geqslant \sigma] + mE_2 \\
&= mE_1[x \mid |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \geqslant \sigma] \\
&\leqslant mE_1[x \mid |f_n(x) - f(x)| \cdot L \geqslant \sigma] \\
&= mE_1\left[x \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{L}\right]
\end{aligned}$$

由于 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，故

$$mE_1\left[x \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{\sigma}{L}\right] \to 0 \quad (n \to \infty)$$

于是 $f_n(x)g(x) \Rightarrow f(x)g(x)$. (c)

从而，$\{f_n(x)g(x)\}$满足维它利定理的全部条件，由维它利定理知

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, g) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

即 $$f_n \xrightarrow{\text{弱}} f.$$

(vi) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，且 $|f_n(x)| \leqslant k$，则

$$f_n(x) \Rightarrow f(x)，且\ |f_n(x)| \leqslant k.$$

由(v)知 $$f_n \xrightarrow{弱} f.$$

即若$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，且$|f_n(x)|\leqslant k$，则必有 $f_n \xrightarrow{弱} f$.

下证由 $f_n \xrightarrow{弱} f$，不能得出$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$.

反证法　若$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$成立，必有 $f_n\Rightarrow f$. 从而，由 $f_n \xrightarrow{弱} f$可推出 $f_n\Rightarrow f$.

由(v)中反例便知矛盾.

故　$f_n \xrightarrow{弱} f$ 成立，不一定有$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$成立.

[6.20]　如果$\{f_n(x)\}$在 L_2 中弱收敛于 $F(x)$，且 $\|f_n\|_2\to\|F\|_2\quad(n\to\infty)$，则在 L_2 中 $f_n \xrightarrow{强} F$.

证　考虑
$$\|f_n-F\|_2^2=\int_a^b (f_n-F)^2\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f_n^2\mathrm{d}x-2\int_a^b f_nF\mathrm{d}x+\int_a^b F^2\mathrm{d}x \tag{1}$$

由题设
$$\int_a^b f_n^2\mathrm{d}x=\|f_n\|_2^2\to\|F\|_2^2=\int_a^b F^2\mathrm{d}x. \tag{2}$$

又由题设知，$\{f_n(x)\}$在 L_2 中弱收敛于 $F(x)$，故对$\forall\ g\in L_2$ 有
$$\int_a^b f_n g\mathrm{d}x\to\int_a^b Fg\mathrm{d}x\quad(n\to\infty).$$

特别取 $g(x)=F(x)$有
$$\int_a^b f_nF\mathrm{d}x\to\int_a^b F^2\mathrm{d}x\quad(n\to\infty) \tag{3}$$

从而，由(1)、(2)、(3)便有
$$\|f_n-F\|_2^2\to\int_a^b F^2\mathrm{d}x-2\int_a^b F^2\mathrm{d}x+\int_a^b F^2\mathrm{d}x=0\quad(n\to\infty).$$

即 $$\|f_n-F\|_2\to 0\quad(n\to\infty).$$

故在 L_2 中，$f_n \xrightarrow{强} F$.

[6.21]　设 $f,f_n\in L_p(p\geqslant 1)$，$f_n\to f$ a.e 于 E，则在 L_p 中

$f_n \xrightarrow{\text{强}} f$的充要条件是$\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

证 必要性 若$f_n \xrightarrow{\text{强}} f$,即$\|f_n - f\|_p \to 0\ (n\to\infty)$,由于

$$|\,\|f_n\|_p - \|f\|_p\,| \leqslant \|f_n - f\|_p \to 0 \quad (n\to\infty)$$

所以
$$\|f_n\|_p \to \|f\|_p \qquad (n\to\infty).$$

充分性 因$f\in L_p$,所以,$|f|^p\in L_1$,即

$$\left\{\int_{-\infty}^{-\infty}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

故存在常数k,使得对$\forall\ \varepsilon>0$,在

$$E_0 = (-\infty, k)\cup(k, +\infty)$$

上有

$$\left\{\int_{E_0}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

由题设知,$\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

所以
$$\left\{\int_{E_0}|f_n|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \to \left\{\int_{E_0}|f|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

因此,存在N_1,当$n>N_1$时,由(1)及极限的保号性知

$$\left\{\int_{E_0}|f_n|^p\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

从而,由明可夫斯基不等式得

$$\begin{aligned}\int_{E_0}|f_n - f|^p\mathrm{d}x &\leqslant \left\{\left[\int_{E_0}|f_n|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{E_0}|f|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\right\}^p \\ &< \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned} \tag{2}$$

另外,在$E_1=[-k,k]$上,由题设$f_n\to f\ a.e$于E_1.

所以,存在$E_\delta\subset E$,$mE_\delta<\delta$,

而在$E_1 - E_\delta$上,$f_n \xRightarrow{\text{一致}} f$,因此,对上述的$\varepsilon>0$,存在$N_2$,使当$n>N_2$时有

$$|f_n - f| < \left(\frac{\varepsilon}{8k}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

从而
$$\int_{E_1 - E_\delta} |f_n - f|^p \mathrm{d}x < \int_{E_1 - E_\delta} \frac{\varepsilon}{8k} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{8k} \cdot mE_1 = \frac{\varepsilon}{8k} \cdot 2k = \frac{\varepsilon}{4} \tag{3}$$

而在 E_δ 上，由于 $mE_\delta < \delta$，由积分的绝对连续性知

$$\int_{E_\delta} |f_n - f|^p \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4}$$

因此，当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时，有(2)，(3)，(4)式成立，所以

$$\int_E |f_n - f|^p \mathrm{d}x = \int_{E_n} |f_n - f|^p \mathrm{d}x + \int_{E_\delta} |f_n - f|^p \mathrm{d}x$$

$$+ \int_{E_1 - E_\delta} |f_n - f|^p \mathrm{d}x$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

即 $\| f_n - f \|_p^p \to 0$，从而 $\| f_n - f \|_p \to 0 \quad (n \to \infty)$

故
$$f_n \xrightarrow{\text{强}} f.$$

三、L_2 空间的性质

［6.22］ 试证，当 $1 < r < p$ 时，$L_p \subset L_r$. 问：此结论对 $mE = +\infty$是否成立？

证 设 $f \in L_p$，令

$$A = E[x \mid |f(x)| \geqslant 1], B = E - A = E[x \mid |f(x)| < 1],$$

则

$$\int_E |f|^r \mathrm{d}x = \int_A |f|^r \mathrm{d}x + \int_B |f|^r \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_A |f|^p \mathrm{d}x + \int_B 1 \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_E |f|^p \mathrm{d}x + mB < +\infty.$$

即 $f \in L_r$，所以 $L_p \subset L_r$.

当 $mE = +\infty$时，结论不一定成立.

例如 $E=[1,+\infty)$，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

则 $f\in L_4$，但 $f\overline{\in} L_2$.

事实上，$\int_E |f(x)|^4 \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1$，而

$$\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = +\infty.$$

[6.23] 证明当 $f,g,h\in L_2$ 时，有

$$(af+bg,h)=a(f,h)+b(g,h).$$

证 当 $f,g,h\in L_2$ 时，由内积定义知

$$(af+bg,h)=\int_E (af+bg)h\mathrm{d}x = a\int_E fh\mathrm{d}x + b\int_E gh\mathrm{d}x$$
$$= a(f,h)+b(g,h).$$

[6.24] 证明 $mE<+\infty$时，$f\in L_2$，则 $f(x)$可积

证 因 $f\in L_2$，所以 $f(x)$在 E 上可测，并且

$$\int_E f^2(x)\mathrm{d}x<+\infty.$$

又因 $(|f(x)|-1)^2\geqslant 0$，即 $|f(x)|\leqslant \dfrac{1+f^2(x)}{2}$，

则 $$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_E \frac{1+f^2(x)}{2}\mathrm{d}x = \int_E \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_E f^2(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}mE+\frac{1}{2}\int_E f^2(x)\mathrm{d}x<+\infty,$$

即 $|f(x)|$在 E 上可积，由 $f(x)$在 E 上的可测性知，$f(x)$在 E 上可积.

注 此题的结论是上题的特殊情形，可由上题直接得出.

[6.25] 设 $E=[0,1]$，作一可积函数 $f(x)$，使 $f\overline{\in} L_2$.

解 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x\in(0,1]\\ 0. & x=0\end{cases}$$

则 $f(x)$的截断函数为

$$\{f(x)\}_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}},\text{当}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\leqslant n\\ n.\text{当}\dfrac{1}{\sqrt{x}}>n.\end{cases}$$

即
$$\{f(x)\}_n=\begin{cases}0,x=0\\ n,0<x<\dfrac{1}{n^2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}.\dfrac{1}{n^2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\{f(x)\}_n\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\frac{1}{n^2}}n\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{n^2}}^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\frac{1}{n^2}+2\sqrt{x}\Big|_{\frac{1}{n^2}}^{1}\right]\\&=\lim_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n})=2.\end{aligned}$$

故　$f(x)\in L[0,1]$.

但
$$f^2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},\quad x\in(0,1]\\ 0.\qquad x=0\end{cases}$$

却不可积. 这是因为

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\{f^2(x)\}_n\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}n\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]\\&=\lim_{n\to\infty}(1+\ln n)=+\infty.\end{aligned}$$

即 $f^2(x)\overline{\in}L_1$，从而 $f(x)\overline{\in}L_2$.

[6.26]　证明在 L_2 中，$(f,g)=0$ 的充要条件是对任意实数 a，有 $\|f+ag\|_2=\|f-ag\|_2$.

证　必要性　设 $(f,g)=0$，则由于

$$\begin{aligned}\|f+ag\|_2^2 &= (f+ag,f+ag)\\ &= \|f\|_2^2+2a(f,g)+a^2\|g\|_2^2\\ &= \|f\|_2^2+a^2\|g\|_2^2 \end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\|f-ag\|_2^2 &= (f-ag,f-ag)\\ &= \|f\|_2^2-2a(f,g)+a^2\|g\|_2^2\\ &= \|f\|_2^2+a^2\|g\|_2^2 \end{aligned}\tag{2}$$

故由(1),(2)知

$$\|f+ag\|_2 = \|f-ag\|_2.$$

充分性　设 $\|f+ag\|_2=\|f-ag\|_2$,即

$$\|f+ag\|_2^2 = \|f-ag\|_2^2,$$

由(1)、(2)两式知

$$\|f\|_2^2 + 2a(f,g) + \|g\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2a(f,g) + a^2\|g\|_2^2,$$

故
$$4a(f,g) = 0.$$

由于 a 为任何实数,取 $a\neq0$,便有 $(f,g)=0$.

[6.27] 试证:L_2 空间是非局部列紧空间.

证　要证明这一问题,只要能在 L_2 中找到一点 f,使包含 f 的任何邻域中都至少有一无限序列没有收敛子列即可.

以下就 $L_2[0,1]$ 来考虑,取 $f=0\in L_2[0,1]$,对 $f=0$ 的任何邻域 $N(0,\delta)$,取 d,使 $\delta>d>0$,令

$$f_n(x) = d\cdot\cos(2n\pi x)\quad (n=1,2,\cdots),$$

则有 $f_n(x)\in L_2[0,1]\quad(n=1,2,\cdots)$,且

$$\|f_n-f\|_2^2 = \int_0^1 f_n^2(x)\mathrm{d}x \leqslant d^2\int_0^1 1\mathrm{d}x < \delta^2.$$

即
$$\rho(f_n,f) = \|f_n-f\|_2 < \delta.$$

从而有
$$f_n\in N(0,\delta)\quad(n=1,2,\cdots)$$

但只要 $m\neq n$,就有

$$\|f_n-f_m\|_2^2 = \int_0^1 d^2[\cos(2n\pi x)-\cos(2m\pi x)]^2\mathrm{d}x$$

$$= d^2\left[\int_0^1\cos^2(2n\pi x)\mathrm{d}x + \int_0^1\cos^2(2m\pi x)\mathrm{d}x\right.$$

$$-2\int_0^1 \cos 2n\pi x \cos 2m\pi x \mathrm{d}x\Big]$$

$$= d^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0\right)=d^2.$$

从而有
$$\| f_n - f_m \|_2 = d > 0 \ (n \neq m).$$

可见$\{f_n\}$不可能有收敛子列，故 L_2 是非局部列紧空间.

[6.28]　设$\{f_n\}$是 L_2 中的序列，若

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_2 < +\infty,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛.

证　由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_2 < +\infty$，故对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ m>0$，当 $n>m$ 时，$\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \| f_n \|_2 < \varepsilon$.

令

$$S_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n,$$

则
$$S_n \in L_2 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

于是，当 $n>m$ 时有

$$\| S_n - S_m \|_2 = \Big\| \sum_{j=m+1}^{n} f_j \Big\|_2 \leqslant \sum_{j=m+1}^{n} \| f_j \|_2$$

$$\leqslant \sum_{j=m+1}^{\infty} \| f_j \|_2 \to 0 \quad (m \to \infty).$$

从而，$\{S_n\}$是 L_2 的基本列，又由于 L_2 是完备的，因此$\{S_n\}$必收敛.

即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$存在，亦即$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$收敛.

[6.29]　若 $f_n \in L_2$，$f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$，则 $\| f_n \|_2 \leqslant k$(k 为常数).

证　用反证法.

假设 $\| f_n \|_2$ 无界，则由此可推出数集

$$\{(f_n, g)\} = \left\{ \int_E f_n(x) g(x) \mathrm{d}x \,\Big|\, g \in L_2 \right\}$$

在 L_2 中任意闭球

$$S=\{g \mid \|g-g_0\|_2\leqslant\varepsilon,\ g,g_0\in L_2\}$$

上无界.

事实上,若在某个闭球

$$S_0=\{g \mid \|g-g_0\|_2\leqslant\varepsilon_0\}$$

上 $\{(f_n,g)\}$ 有界,即存在常数 M,使

$$|(f_n,g)|\leqslant M,\forall\ g\in S_0\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是,对 $\forall\ h\in L_2, h\neq 0$,作 $h'=g_0+\varepsilon_0\dfrac{h}{\|h\|_2}$,则

$$\|h'-g_0\|_2=\left\|\varepsilon_0\cdot\frac{h}{\|h\|_2}\right\|_2=\varepsilon_0,$$

故 $$h'\in S_0.$$

从而 $$|(f_n,h')|\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots).$$

即

$$\begin{aligned}|(f_n,h')|&=\left|\left(f_n,g_0+\varepsilon_0\frac{h}{\|h\|_2}\right)\right|\\&=\left|(f_n,g_0)+\frac{\varepsilon_0}{\|h\|_2}(f_n,h)\right|\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

而

$$\left|\frac{\varepsilon_0}{\|h\|_2}(f_n,h)\right|-|(f_n,g_0)|\leqslant\left|\frac{\varepsilon_0}{\|h\|_2}(f_n,h)+(f_n,g_0)\right|\leqslant M,$$

故得

$$|(f_n,h)|\leqslant\frac{M+|(f_n,g_0)|}{\varepsilon_0}\cdot\|h\|_2\quad(n=1,2,\cdots).$$

但 $g_0\in S$,所以,$|(f_n,g_0)|\leqslant M$. 从而

$$|(f_n,h)|\leqslant\frac{2M}{\varepsilon_0}\|h\|_2=k_1\cdot\|h\|_2\quad(n=1,2,\cdots).$$

$$\left(\text{其中 } k_1=\frac{2M}{\varepsilon_0}\right)$$

注意到上式对 $\forall\ h\in L_2$ 成立,特别取 $h=f_n$,则

$$\|f_n\|_2^2\leqslant k_1\cdot\|f_n\|_2,$$

即 $$\|f_n\|_2\leqslant k_1.$$

这与假设$\|f_n\|_2$无界矛盾，故若$\|f_n\|_2$无界，则数集$\{(f_n,g)\}$在L_2中的任何闭球

$$S=\{g\mid \|g-g_0\|\leqslant\varepsilon\}$$

上无界.

现设$\overline{S_0}$是L_2内任一闭球，于是，集$\{(f_n,g)\}$在$\overline{S_0}$上无界，因此，存在自然数n_1和$g_1\in\overline{S_0}$，使得$|(f_{n_1},g_1)|>1$.

由内积的连续性得

$$F_{n_1}(g)=(f_{n_1},g).$$

是g的连续函数，故由连续函数的性质知，存在以g_1为中心的闭球

$$\overline{S}_1=\{g\mid \|g-g_1\|_2\leqslant\varepsilon_1\}\subset\overline{S}_0\quad(\varepsilon_1<1)$$

使得当$\|g-g_1\|_2\leqslant\varepsilon_1$时，都有

$$|(f_{n_1},g)|>1.$$

在闭球$\overline{S}_1$上，集$\{(f_n,g)\}$仍然无界，因此，存在$n_2>n_1$和一个元素$g_2\in\overline{S}_1$，使得$|(f_{n_2},g_2)|>2$，

仍由内积的连续性知，存在闭球

$$\overline{S}_2=\{g\mid \|g-g_2\|\leqslant\varepsilon_2\}\subset\overline{S}_1\quad\left(\varepsilon_2<\frac{1}{2}\right),$$

使对$\forall\ g\in\overline{S}_2$，都有$|(f_{n_2},g)|>2$.

…… ……

如此继续下去，存在f_{n_k}，$g_k\in\overline{S}_{k-1}$，使$|(f_{n_k},g_k)|>k$，由内积的连续性，存在闭球

$$\overline{S}_k=\{g\mid \|g-g_k\|_2\leqslant\varepsilon_k\}\subset\overline{S}_{k-1}\quad(\varepsilon_k<\frac{1}{k}).$$

使对$\forall\ g\in\overline{S_k}$有$|(f_{n_k},g)|>k$，如此得到一点列$\{g_n\}$.

由于

$$\overline{S}_{n+p}\subset\overline{S}_n(p\geqslant1),g_{n+p},g_n\in S_n,$$

$$\|g_{n+p}-g_n\|_2\leqslant\varepsilon_n\longrightarrow0\quad(n\to\infty).$$

所以，$\{g_n\}$为L_2中的基本列.

由于L_2为完全空间，故存在$g^*\in L_2$，使

$$g_n \xrightarrow{\text{强}} g^* \quad (n \to \infty).$$

且 $$g^* \in \overline{S}_k \quad (k = 1,2,\cdots).$$

而由条件知，$f_n \xrightarrow{\text{弱}} f$，故

$$\lim_{k\to\infty}(f_{n_k}, g^*) = (f, g^*).$$

但 $|(f_{n_k}, g^*)| \geqslant k$，所以，$\lim\limits_{k\to\infty}|(f_{n_k}, g^*)| = +\infty$，矛盾. 因此 $\| f_n \|_2$ 有界，即存在常数 k，使 $\| f_n \|_2 \leqslant k$.

[6.30] 设积分 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 对任何 $g \in L_2$，都存在且有限，则 $f \in L_2$.

证 由于对任意 $g \in L_2$，$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 存在且有限，故令 $g(x) \equiv 1$，则 $g \in L_2$，有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在且有限，所以 $f(x) \in L[a,b]$，于是，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处有限、可测.

令

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), x \in E[x \mid |f| \leqslant n] \\ n. x \in E[x \mid |f| > n] \end{cases} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

则 $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

即对 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N > 0$，当 $n > N$ 时，

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}, \tag{1}$$

并且 $|f_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上有界可测，由于 $\forall\ g \in L_2$，故 $|g(x)|^2$ 有界 $a.e$ 于 $[a,b]$，从而存在 $M > 0$，使

$$|g(x)|^2 \leqslant M^2 \ a.e \text{ 于} [a,b].$$

即 $$|g(x)| \leqslant M \ a.e \text{ 于} [a,b].$$

对上述的 $\varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时，

$$|f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| = |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)|$$

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

故 $f_n(x)g(x) \longrightarrow f(x)g(x)\ a.e$ 于 $[a,b]$，且

$$|f_n(x)g(x)| \leqslant |f(x)g(x)| + 1.$$

而由条件知 $\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x$ 存在，由勒贝格控制收敛定理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

由 $g\in L_2$ 的任意性知，$f_n(x)$ 在 L_2 中弱收敛于 $f(x)$. 由上题知，$\{\|f_n\|_2\}$ 有界，即

$$\int_a^b |f_n(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant k \quad (n = 1,2,\cdots).$$

而
$$|f_n(x)|^2 \longrightarrow |f(x)|^2\ a.e\ 于[a,b]$$

由法都定理得

$$\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty}|f_n(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)|^2\mathrm{d}x \leqslant k.$$

即 $f\in L_2$.

[6.31] 设 $t_n(n=1,2,\cdots)$ 是方程 $\mathrm{tg}t = t$ 的正根，试证：$\{\sin t_n x\}$ 是 $L_2[0,1]$中的正交系.

证 由于 $t_n(n=1,2,\cdots)$是方程的正根，所以，当 $m\neq n$ 时，有

$$t_n = \mathrm{tg}t_n = \frac{\sin t_n}{\cos t_n} > 0,\quad t_m = \mathrm{tg}t_m = \frac{\sin t_m}{\cos t_m} > 0$$

即

$$\sin t_n \neq 0, \cos t_n \neq 0, \sin t_m \neq 0, \cos t_m \neq 0.$$

考虑 $L_2[0,1]$中的内积

$$(\sin t_n x, \sin t_m x) = \int_0^1 \sin t_n x \cdot \sin t_m x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1[\cos(t_n + t_m)x - \cos(t_n - t_m)x]\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(t_n + t_m)}{t_n + t_m} - \frac{\sin(t_n - t_m)}{t_n - t_m}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t_n^2 - t_m^2}[(t_n - t_m)(\sin t_n\cdot\cos t_m + \cos t_n\cdot\sin t_m)$$
$$- (t_n + t_m)(\sin t_n\cos t_m - \cos t_n\sin t_m)]$$

$$= -\frac{\cos t_n\cdot\cos t_m}{2(t_n^2 - t_m^2)}[(t_n - t_m)(\mathrm{tg}t_n + \mathrm{tg}t_m)$$

$$- (t_n + t_m)(\mathrm{tg}t_n - \mathrm{tg}t_m)]$$

$$= -\frac{\cos t_n \cdot \cos t_m}{2(t_n^2 - t_m^2)}[(t_n - t_m)(t_n + t_m) - (t_n + t_m)(t_n - t_m)]$$

$$= 0,$$

即　$m \neq n$ 时，$(\sin t_n x, \sin t_m x) = 0$.

故　$\sin t_n x$ 与 $\sin t_m x$ 正交.

所以，$\{\sin t_n x\}$是 $L_2[0,1]$中的正交系.

[6.32]　设$\{e_k\}$是 L_2 中一标准正交系，$\{a_k\}$是一列常数，则下述几件事是等价的.

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ 收敛；

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ 收敛；

(3) 存在 $x \in L_2$，使 $a_k = (x, e_k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

证　(i) 先证(1)与(2)等价.

令
$$S_n = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n.$$
$$\sigma_n = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2.$$

由$\{e_k\}$的正交性，对任意的 m 及 $n > m$

$$\| S_n - S_m \|_2^2 = \| a_{m+1} e_{m+1} + a_{m+2} e_{m+2} + \cdots + a_n e_n \|_2^2$$
$$= |a_{m+1}|^2 + \cdots + |a_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m.$$

因此，$\{S_n\}$是基本列的充要条件是$\{\sigma_n\}$为基本列，又因 L_2 及实直线 $\mathbf{R}^1$ 都是完备的，从而证得$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ 收敛的充要条件是 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ 收敛.

(ii) 再证(2)与(3)等价.

(2)$\Rightarrow$(3)　设$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ 收敛，由(i)知$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ 也收敛，设 $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$，令

$$S_n = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n,$$

于是

$$(S_n, e_j) = (a_j e_j, e_j) = a_j, j = 1, 2, \cdots, k$$
$$(k \leqslant n \text{ 且固定})$$

由假设条件知

$$S_n \longrightarrow x \quad (n \to \infty).$$

由内积的连续性

$$a_j = (S_n, e_j) \longrightarrow (x, e_j) \quad (j \leqslant k).$$

因 $n \to \infty$ 时，$k(\leqslant n)$ 也可以任意大，所以

$$a_j = (x, e_j), j = 1, 2, \cdots$$

此即证得(3).

(3)$\Longrightarrow$(2). 设 $a_k = (x, e_k)$，由贝塞尔不等式可知

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$$

收敛，再由(2)$\Longrightarrow$(3)的证明知

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$$

收敛，由(i)得 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ 收敛.

[**6.33**] 设 $M \subset L_2$，$M^{\perp}$ 表示 L_2 中与 M 中所有元素都正交的元素的全体组成的集合，即

$$M^{\perp} = \{g \mid (f, g) = 0, f \in M, g \in L_2\},$$

证明：$M^{\perp}$ 是 L_2 的一个完备子空间.

证 先证 $M^{\perp}$ 是线性子空间.

设 $x, y \in M^{\perp}$，则对任意实数 a 及任意 $z \in M$，

$$(x + ay, z) = (x, z) + a(y, z) = 0 + a \cdot 0 = 0.$$

于是 $x + ay \in M^{\perp}$，因此 $M^{\perp}$ 是一线性子空间.

再证 $M^{\perp}$ 是闭的.

设 $x_0 \in (M^{\perp})'$，由聚点定义，则有 $\{x_n\} \subset M^{\perp}$，使

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

任取 $y \in M$，则 $(x_n, y) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 再由内积的连续性知

$$(x_0, y) = \lim_{n \to \infty} (x_n, y) = 0.$$

于是　$x_0 \in M^{\perp}$，因此 $M^{\perp}$ 是闭的.

即　$M^{\perp}$ 是 L_2 的一个完备子空间.

[6.34]　设 $\{w_k(x)\}$ 是一完全的正规直交系统，假若 $\{\varphi_k(x)\}$ 在 L_2 中满足条件：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b [w_k(x)-\varphi_k(x)]^2 \mathrm{d}x < 1,$$

且 $\{\varphi_k(x)\}$ 是一正规直交系统，那么 $\{\varphi_k(x)\}$ 也是完全的.

证　设 $f \in L_2$，且 $(f,\varphi_k)=0$ $(k=1,2,\cdots)$. 由完全系统的定义，则只要证 $f=0$ 即可.

由于

$$(f,w_k)=(f,\varphi_k)+(f,w_k-\varphi_k)=(f,w_k-\varphi_k),$$

所以

$$\begin{aligned}|(f,w_k)|^2 &= |(f,w_k-\varphi_k)|^2\\ &\leqslant \|f\|_2^2 \cdot \|w_k-\varphi_k\|_2^2 \quad (k=1,2,\cdots)\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|(f,w_k)|^2 &\leqslant \|f\|_2^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\|w_k-\varphi_k\|_2^2\\ &= \|f\|_2^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b [w_k-\varphi_k]^2 \mathrm{d}x \qquad (1)\end{aligned}$$

下面证明 $\|f\|_2=0$.

反证法　若 $f\neq 0$，则 $\|f\|_2>0$.

由(1)式及 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b (w_k-\varphi_k)^2 \mathrm{d}x<1$ 知

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f,w_k)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\int_b^a [w_k-\varphi_k]^2 \mathrm{d}x < \|f\|_2^2. \qquad (2)$$

另一方面，由于 $\{w_k(x)\}$ 是 L_2 中的完全系统，故巴塞弗公式成立，即

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|(f_1 w_k)|^2 \qquad (3)$$

比较(2)，(3)两式有

$$\|f\|_2^2 < \|f\|_2^2,$$

显然矛盾，故必有 $\|f\|_2=0$，即 $f=0$.

所以，$\{\varphi_k(x)\}$是完全的.

[6. 35]　设$\{w_k(x)\}$是$[a,b]$上封闭的正规直交系统，则在$[a,b]$上关系式

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k^2(x) = +\infty \tag{1}$$

几乎处处成立.

证　反证法　记 $E=[a,b]$.

设(1)式不是几乎处处成立，即

$$mE\left[x \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} w_k^2(x) < +\infty\right] > 0,$$

于是，必有 $M>0$，使

$$mE\left[x \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} w_k^2(x) < M\right] > 0.$$

记 $A=E\left[x \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} w_k^2(x)<M\right]$，则 $mA>0$. 取 A 的可测子集 B，使

$$0 < mB < \frac{1}{2M},$$

且定义

$$f(x) = \begin{cases} d, x \in B \\ 0, x \overline{\in} B \end{cases} \qquad (d \neq 0)$$

则　$f \in L_2$，

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \int_B f^2(x)\mathrm{d}x = d^2 \cdot mB \tag{2}$$

$$\begin{aligned} a_k^2 &= (f, w_k)^2 = \left(\int_a^b f(x)w_k(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &= \left(\int_B d w_k(x)\mathrm{d}x\right)^2 = d^2\left(\int_B w_k(x)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant d^2\left\{\left[\int_B w_k^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_B 1^2 \mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^2 \\ &= d^2 \cdot mB \cdot \int_B w_k^2 \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

从而

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 \leqslant d^2 \cdot mB \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\int_B w_k^2 \mathrm{d}x = d^2 \cdot mB \cdot \int_B\Big(\sum_{k=1}^{\infty}w_k^2(x)\Big)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant d^2 \cdot mB \cdot M \cdot mB = d^2 \cdot M \cdot (mB)^2$$

$$< \frac{1}{2}d^2 \cdot mB \qquad (3)$$

比较(2)、(3)两式有

$$\|f\|_2^2 > \sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(f, w_k)^2.$$

即 $\|f\|_2^2 \neq \sum_{k=1}^{\infty}(f, w_k)^2$，此与$\{w_k(x)\}$的封闭性矛盾. 故必有

$$mE\Big[x \Big| \sum_{k=1}^{\infty}w_k^2(x) < +\infty\Big] = 0.$$

所以，$\sum_{k=1}^{\infty}w_k^2(x) = +\infty$在$[a,b]$上几乎处处成立.

[6.36] 设 $f \in L_2[a,b]$，试证

$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h) - f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (0 < 2\delta \leqslant b - a).$$

证 (i)先证$\forall\ \varepsilon > 0$，存在连续函数 $\varphi(x)$，使

$$\left\{\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

令 $E = [a,b], E_n = E[x \mid |f| > n] (n = 1, 2, \cdots)$.

由于 $f \in L_2[a,b]$，故 $|f|^2 \in L_1[a,b]$，所以由积分的绝对连续性，存在 $\Delta > 0$，当 $me < \Delta$ 时，就有

$$\left\{\int_e |f|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

又因$\lim_{n\to\infty}mE_n = 0$，所以存在 N，使 $mE_N < \Delta$，从而有

$$N \cdot (mE_N)^{\frac{1}{2}} < \left\{\int_{E_N}|f|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

因为 $f(x)$在 $E - E_N$ 上几乎处处有界，由鲁金定理，存在闭集 F，$F \subset E - E_N$，使得

$$\{m[E - E_N - F]\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4N},$$

而 $f(x)$在 F 上连续.

在$[a,b]$上作如下连续函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F \\ \text{线性函数}. & x \in E - F \end{cases}$$

因$|\varphi(x)| \leqslant N$,由题[6.7]知:

$$\left\{\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left\{\int_F |f - \varphi|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_{E_N} |f - \varphi|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left\{\int_{E-E_N-F} |f - \varphi|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 0 + \left\{\int_{E_N} |f|^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_{E_N} N^2 \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left\{\int_{E-E_N-F} (|f|^2 + |\varphi|^2) \mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 2N[m(E - E_N - F)]^{\frac{1}{2}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

所以 $\varphi(x)$即为所求的连续函数.

(ii) 若 $f(x)$为连续函数,证明命题.

对任何满足$|h_n| < \delta, h_n \to 0$ 的$\{h_n\}$,令

$$f_n = f(x + h_n),$$

则 $f, f_n \in L_2, f_n(x) \longrightarrow f(x)$在$[a+\delta, b-\delta]$上处处成立. 又由积分的连续性知

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} |f_n|^2 \mathrm{d}x \longrightarrow \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f|^2 \mathrm{d}x \quad (n \to \infty).$$

即在 $L_2[a+\delta, b-\delta]$上 $\|f_n\|_2 \longrightarrow \|f\|_2$. 由题[6.20]知

$$f_n \xrightarrow{\text{强}} f,$$

即

$$\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f_n - f|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

也即

$$\lim_{h_n\to 0}\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h_n)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} = 0.$$

由 h_n 的任意性知

$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} = 0.$$

从而当 $f(x)$ 为连续函数时，对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ h_0>0$，当 $0<h<h_0$ 时有

$$\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

(iii) 若 $f(x)$ 为任意可积函数，证明命题.

当 $f(x)\in L_2[a,b]$ 时，由 (i)，对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，使得

$$\left\{\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

从而当 $0<h_0<\delta$ 时，使当 $h<h_0$ 时，也有

$$\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x)-\varphi(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-\varphi(x+h)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left\{\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由 (ii)，结论对连续函数成立.

故对连续函数 $\varphi(x)$，也有 (1) 式成立. 即

$$\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

从而

$$\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-\varphi(x+h)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|\varphi(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

即对$\forall\ f\in L_2[a,b]$，都有

$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}=0.$$

注 此题的结论对$f\in L_p[a,b]$也成立，证法完全相同.

[6.37] 设$f\in L_2(-\infty,+\infty)$，$g\in L_2(-\infty,+\infty)$

试证

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)g(x)\mathrm{d}x$$

为t的连续函数.

证 由于$f\in L_2(-\infty,+\infty)$，故

$$|f(x+h)-f(x)|\in L_2(-\infty,+\infty),$$

即

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty.$$

故对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，使

$$\left\{\int_{-\infty}^{-N}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left\{\int_{N}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由上题知，存在$h_0>0$，当$h<h_0$时有

$$\left\{\int_{-N}^{N}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

从而有

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{-N}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left\{\int_{-N}^{N}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left\{\int_{N}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

即
$$\lim_{h\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}=0.$$

下证 $F(t)$是 t 的连续函数.

由霍尔得不等式,对$\forall\ t\in(-\infty,+\infty)$有

$$|F(t+\Delta t)-F(t)|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t+\Delta t)\cdot g(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)g(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t+\Delta t)-f(x+t)|\cdot|g(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t+\Delta t)-f(x+t)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+\Delta t)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\cdot\|g\|_2.$$

由上题知

$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+\Delta t)-f(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\longrightarrow 0\quad(\Delta t\to 0)$$

所以
$$|F(t+\Delta t)-F(t)|\longrightarrow 0\quad(\Delta t\to 0).$$

即 $F(t)$对任何 t 是连续的.

注 此题的结论对 $f\in L_p(-\infty,+\infty),g\in L_q(-\infty,+\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 也成立,证法完全相同.

[6.38] 设$\{\varphi_n\}$是正规直交系统，则

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n = 0$$

只有当$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$时，才能成立.

证 对$\forall\ \varphi_i,\varphi_j\in\{\varphi_n\}$，由于$\{\varphi_n\}$是正规直交系统，故有

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \begin{cases}1, i = j\\ 0, i \neq j\end{cases}$$

若 $a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\cdots+a_n\varphi_n=0$，则

$$(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n,\varphi_i) = (0,\varphi_i) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

又由于

$$\begin{aligned}&(a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\cdots+a_n\varphi_n,\varphi_i)\\ &=a_1(\varphi_1,\varphi_i)+a_2(\varphi_2,\varphi_i)+\cdots+a_n(\varphi_n,\varphi_i)\\ &=a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+\cdots+a_{i-1}\cdot 0+a_i(\varphi_i,\varphi_i)+\cdots+a_n\cdot 0\\ &=a_i \quad (i=1,2,\cdots,n).\end{aligned}$$

故
$$a_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

即 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$是线性无关的.

注 此题表明：L_2中任何正规直交系统都是由线性无关的函数组成的.

[6.39] 试证$L_2(0,1)$中正规直交系统中的元素个数不超过可数个.

证 因为L_2为可分空间，故存在L_2中的可列稠密子集A，设

$$A = \{g_1,g_2,\cdots,g_n,\cdots\},$$

且设$\{w_i\}$为正规直交系统，则对任一$w_k\in\{w_i\}$，必在A中存在$g_n(k)$，使得

$$\| w_k - g_n(k) \|_2 < \frac{1}{2},$$

对另一$w_j\in\{w_i\}$，则在A中存在$g_n(j)$，使得

$$\| w_j - g_n(j) \|_2 < \frac{1}{2}.$$

当$k\neq j$时，有

$$\| g_n(k)-g_n(j) \|_2= \| g_n(k)-w_k+w_k-w_j+w_j-g_n(j) \|_2$$

$$\geqslant \| w_k - w_j \|_2 - \| g_n(k) - w_k \|_2 - \| g_n(j) - w_j \|_2.$$

又由于

$$\| w_k - w_j \|_2 = \left\{ \int_0^1 (w_k - w_j)^2 \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \int_0^1 w_k^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 w_j^2 \mathrm{d}x - 2\int_0^1 w_k w_j \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 + 1 - 2 \cdot 0)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

故 $\| g_n(k) - g_n(j) \|_2 \geqslant \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - 1.$

即不同的 w_i 对应着 A 中不同的 g_i，而 A 为可数集，因此$\{w_i\}$至多含可列个元素.

故$\{w_i\}$的势不超过 $\mathscr{B}$.

[**6.40**] 证明 $T(x) = t^n(x) = [1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta]^n$ 是三角多项式.

证 $t(x) = 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta = (1 - \cos\delta) + \cos(x - x_0)$

$= a + \cos(x - x_0)$，其中 $a = 1 - \cos\delta$

$\therefore$ $T(x) = [t(x)]^n = [a + \cos(x - x_0)]^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \cos^k (x - x_0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_k \cos^k (x - x_0),$$

其中，$b_k = C_n^k a^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$.

但由于$(\cos x)^k$ 可表为 $1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos kx$ 的线性组合，故

$$\cos^k (x - x_0) = C_0 + C_1 \cos(x - x_0) + C_2 \cos 2(x - x_0) + \cdots + C_k \cos k(x - x_0)$$

从而存在 $d_k (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$使得

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} d_k \cos k(x - x_0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [d_k \cos k x_0 \cos kx + d_k \sin k x_0 \sin kx]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\cos kx+\sum_{k=1}^{n}\beta_k\sin kx$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx).$$

其中，$\frac{a_0}{2}=d_0,\alpha_k=d_k\cos kx_0,\beta_k=d_k\sin kx_0\quad(k=1,2,\cdots,n)$.

故　$T(x)$为一三角多项式.

[**6.41**]　证明三角系统 T:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},\cdots$$

在 $L_2[-\pi,\pi]$中是正规直交的.

证　由于 $\left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\|_2=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\mathrm{d}x=1$,

$$\left\|\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\right\|_2=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 kx}{\pi}\mathrm{d}x=1\quad(k=1,2,\cdots),$$

$$\left\|\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\|_2=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 kx}{\pi}\mathrm{d}x=1\quad(k=1,2,\cdots).$$

故　T 是正规系统.

其次

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x=0\quad(k=1,2,\cdots),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x=0\quad(k=1,2,\cdots),$$

$$\left(\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}\right)=\int_{\pi}^{\pi}\frac{\cos kx\sin mx}{\pi}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+m)x+\sin(m-k)x]\mathrm{d}x=0.$$

$(k,m=1,2,\cdots)$

$$\left(\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cdot\cos mx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+m)x+\cos(k-m)x]\mathrm{d}x$$

$$=0\quad(k,m=1,2,\cdots,k\neq m)$$

$$\left(\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin mx\mathrm{d}x=0\quad(k\neq m).$$

故 T 是正规直交系统.

[6.42] 证明三角系统 T:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots$$

是 $L_2[-\pi,\pi]$上的完全系统.

证 由上题知 T 为正规直交系统.

设 $f\in L_2[-\pi,\pi]$,它的坐标全为 0,即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots)\tag{1}$$

现只要证明 $f(x)=0$ $a.e$ 于$[-\pi,\pi]$即可.

令
$$g(x)=\int_{-x}^{x}f(t)\mathrm{d}t,$$

则 $g(x)$是全连续函数,且 $g'(x)=f(x)-f(-x)$,及

$$g(-\pi)=g(\pi)=0.$$

由分部积分公式及(1)知

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=g(x)\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot g'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot f(-x)\mathrm{d}x=0$$

$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{n}g(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g'(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

令
$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x, \quad G(x) = g(x) - C$$

则

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{\pi} C\mathrm{d}x = 2\pi C - 2\pi C = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\cos nx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\mathrm{d}x - C\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x$$
$$= 0 - 0 = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x)\sin nx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\mathrm{d}x - C\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x$$
$$= 0 - 0 = 0.$$

所以对任意三角多项式

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

都有
$$\int_{-\pi}^{\pi} T(x)G(x)\mathrm{d}x = 0.$$

若 $G(x)\not\equiv 0$，则有 $x_0\in(-\pi,\pi)$，使 $G(x_0)\neq 0$.

不妨设 $G(x_0)=2\varepsilon_0>0$，由 $G(x)$ 的连续性有

$I_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [-\pi,\pi]$，使在 I_0 上 $G(x) > \varepsilon_0$.

令
$$t(x) = 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta,$$

则在 I_0 上 $t(x)>1$，在 $I-I_0$ 上 $|t(x)|<1$.

由题[6.40]知，$t^n(x)$ 为三角多项式，因此对任意 n，都有

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x)T(x)\mathrm{d}x = \int_{I_0} G(x)t^n(x)\mathrm{d}x + \int_{I-I_0} G(x)t^n(x)\mathrm{d}x.$$

但

$$\lim_{n\to\infty}\int_{I_0} G(x)t^n(x)\mathrm{d}x = +\infty, \lim_{n\to\infty}\int_{I-I_0} G(x)t^n(x)\mathrm{d}x = 0$$

与 $\int_{-\pi}^{\pi} G(x)t^n(x)\mathrm{d}x = 0$ 矛盾.

所以 $G(x)\equiv 0$，即 $g(x)\equiv C$.

但 $g(-\pi)=g(\pi)=0$，所以 $g(x)\equiv 0$.

即 $$\int_{-\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t \equiv 0.$$

∴ $$f(x)=0 \quad a.e \text{ 于} [-\pi,\pi].$$

故 三角系统 T 是完全的.

[6.43] 证明有限函数系统$\{f_i\}(i=1,2,\cdots,N)$在 L_2 中不可能是完全的.

证 设 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_N\}$ 为 L_2 中的有限函数系统，不妨设其线性无关.

用施密特直交化手续可将 F 变为等价的直交系统 Ω：

$$\Omega = \{w_1,w_2,\cdots,w_N\},$$

Ω 与 F 也相互线性表示，故 Ω 与 F 同时为完全或不完全.

下证 Ω 不可能是 L_2 中的完全系统.

反证法 若 Ω 为 L_2 中的完全系统，则也为封闭系统，从而对 L_2 中的每个 f，均可表示为 Ω 的线性组合：

$$f = \sum_{k=1}^{N} C_k w_k, C_k = (f, w_k)$$

设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m(m\geqslant N)$为 L_2 中任一线性无关系($\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$ 可选系统 T 的 m 个函数)，它们都可用 Ω 线性表示为：

$$\varphi_1 = a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \cdots + a_{1N}w_N,$$

$$\varphi_2 = a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{2N}w_N,$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\varphi_m = a_{m1}w_1 + a_{m2}w_2 + \cdots + a_{mN}w_N (m\geqslant N).$$

由于矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2N} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mN} \end{pmatrix}$$

的秩最大为 N.

所以,$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$ 中最多只有 N 个线性无关的函数.

此说明 L_2 中的任一函数系统至多有 N 个线性无关的函数,与 L_2 中有可列个线性无关的函数组成的函数系统(例如系统 T')矛盾.从而,有限函数系 F 在 L_2 中不可能是完全系统.

注 此题说明 L_2 中任何完全系统的势不小于 $\aleph_0$,题[6.39]说明 L_2 中任何完全系统的势不超于 $\aleph_0$,由此得出,L_2 中任何完全系统的势等于 $\aleph_0$,即恰包含可列个函数.

[6.44] 设 $\{w_k(x)\}(k=1,2,\cdots,n)$ 是一个正规直交系,又设 $f\in L_2$,取线性组合 $\sum_{k=1}^{n} A_k w_k$,则偏差

$$\| f - \sum_{k=1}^{n} A_k w_k \|_2$$

当 $A_k=(f,w_k)(k=1,2,\cdots,n)$ 时达到最小值.

证 由于 $\{w_k(x)\}(k=1,2,\cdots,n)$ 是正规直交系,$f\in L_2$,从而由贝塞尔不等式知 $\|f\|_2^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |(f,w_k)|^2$.

于是 $\| f - \sum_{k=1}^{n} A_k w_k \|_2^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} A_k w_k, f - \sum_{k=1}^{n} A_k w_k \right)$

$$= \|f\|_2^2 + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} A_k (f,w_k)$$

$$= \|f\|_2^2 + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} A_k (f,w_k) + \sum_{k=1}^{n} (f,w_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} (f,w_k)^2$$

$$= \|f\|_2^2 + \sum_{k=1}^{n} [A_k - (f,w_k)]^2 - \sum_{k=1}^{n} (f,w_k)^2$$

$$=\left[\|f\|_2^2-\sum_{k=1}^{n}(f,w_k)^2\right]+\sum_{k=1}^{n}[A_k-(f,w_k)]^2$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{n}[A_k-(f,w_k)]^2.$$

故　当 $A_k=(f,w_k)$ 时，$\|f-\sum_{k=1}^{n}A_kw_k\|_2^2$ 达到最小值.

[6.45]　试证，对于 $f\in L_2$，有 $\|f\|_2=\sup\limits_{\|g\|_2\leqslant 1}\left|\int_E fg\mathrm{d}x\right|$.

证　对于 $f\in L_2, g\in L_2, (g\neq 0)$　由许瓦兹不等式有

$$\left|\int_E fg\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E|fg|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\left(\int_E|f|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_E|g|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\|f\|_2\cdot\|g\|_2. \qquad *$$

取 $g^*=\dfrac{g}{\|g\|_2}$，则 $\|g^*\|_2=1$，由（*）式得

$$\left|\int_E fg^*\mathrm{d}x\right|\leqslant\sup_{\|g\|_2\leqslant 1}\left|\int_E fg\mathrm{d}x\right|\leqslant\|f\|_2,$$

此式对一切 $\|g^*\|_2\leqslant 1$ 成立.

即得

$$\sup_{\|g^*\|_2\leqslant 1}\left|\int_E fg^*\mathrm{d}x\right|\leqslant\|f\|_2. \tag{1}$$

另一方面，设 $\|f\|_2\neq 0$（不然结论成立）.

选取 $g^*=\dfrac{f}{\|f\|_2}$，则 $\|g^*\|_2=1$. 而有

$$\left|\int_E f\cdot\frac{f}{\|f\|_2}\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{\|f\|_2}\left|\int_E f^2\mathrm{d}x\right|=\frac{\|f\|_2^2}{\|f\|_2}=\|f\|_2.$$

故

$$\sup_{\|g^*\|\leqslant 1}\left|\int_E fg^*\mathrm{d}x\right|=\|f\|_2. \tag{2}$$

综合(1),(2)即有　$\|f\|_2=\sup\limits_{\|g\|_2\leqslant 1}\left|\int_E fg\mathrm{d}x\right|$.